

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÉLISATION ET COMMANDE D'UN QUADRICOPTÈRE EN PRÉSENCE DE  
VENT

CATHERINE MASSÉ

DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE AÉROSPATIAL)

DÉCEMBRE 2018

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

MODÉLISATION ET COMMANDE D'UN QUADRICOPTÈRE EN PRÉSENCE DE  
VENT

présenté par : MASSÉ Catherine

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. SAYDY Lahcen, Ph. D., président

M. SAUSSIÉ David, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. LE NY Jérôme, Ph. D., membre

## DÉDICACE

*À Charlo,  
le poisson rouge que je n'ai pas.*

## REMERCIEMENTS

Le travail présenté dans ce mémoire a en partie été réalisé avec la contribution financière du Conseil de Recherches en Sciences Naturelles et en Génie du Canada (CRSNG) et de celle de mon directeur de recherche David Saussié ; je leur suis reconnaissante pour l'appui fourni.

Je tiens encore une fois à remercier mon directeur de maîtrise David Saussié qui a su m'encadrer et m'initier au domaine de la recherche en plus de m'offrir l'opportunité d'assister à l'*International Conference on Unmanned Aircraft Systems* (ICUAS) qui s'est tenue à Dallas au Texas en juin 2018, une expérience enrichissante dont je suis reconnaissante.

J'aimerais également remercier mes collègues du MRASL (Mobile Robotics and Autonomous Systems Laboratory) Olivier Gougeon, Jérémie Pilon, Duc Tien Nguyen, Justin Cano, André Phu-Van Nguyen et le nouveau venu, Mathieu Ashby. Ils ont tous, chacun à sa façon, contribué à rendre mes deux années au laboratoire agréables et divertissantes. Un merci tout spécial à Jérémie et à Tien sans qui il m'aurait été impossible de réaliser mes essais expérimentaux et qui se sont toujours montrés disponibles en cas de besoin.

Merci également à tous mes amis du CEGA et du CEGM qui ont su m'encourager, me soutenir et m'aider à préserver ma santé mentale au travers des hauts et des bas de ces deux dernières années.

Je tiens finalement à remercier ma famille ; mes parents Andrée et Benoit qui ont toujours cru en moi et fait tout ce qu'ils pouvaient pour offrir la meilleure des chances à leurs enfants, ma tante Martine et mon oncle Gaëtan qui m'ont hébergée pour mes premières années à Polytechnique, qui ont su me donner confiance en moi et en mes capacités et qui depuis, sont restés présents pour me guider quand j'en ai besoin. Merci aussi à mon cousin Philippe, ma sœur Dominique et ses deux petits amours Léa et Mathis ; des êtres exceptionnels que je chéris fort.

## RÉSUMÉ

Les multicoptères sont utilisés à toutes sortes de fins, mais limités par ce que permet la technologie actuelle. Il incombe alors de développer des solutions qui vont permettre de repousser ces limites. Une des plus grandes limites à l’heure actuelle est le vent. Les drones sont souvent appelés à opérer dans des milieux extérieurs, pour l’inspection de structures notamment. Leur vulnérabilité face aux perturbations occasionnées par un environnement venteux en réduit toutefois les performances et limite leur spectre d’utilisation. Dans cet optique, on présente dans ce projet une solution pour améliorer la résistance d’un quadricoptère à ce type de perturbations et ainsi rendre l’utilisateur moins dépendant de son environnement lors de ses activités.

L’approche suggérée vise à améliorer la résistance du quadricoptère au vent via une loi de commande plus robuste. Pour ce faire, on établit d’abord les équations non linéaires caractérisant la dynamique d’un quadricoptère dans le vent. À partir de ces équations, on peut établir l’expression du modèle d’état linéaire invariant dans le temps (*Linear Time Invariant* (LTI)) en fonction des valeurs d’équilibre du drone.

On synthétise ensuite une loi de commande efficace en maintien de position. On compare alors deux techniques de synthèse différentes ; la synthèse *Linear Quadratic Regulator* (LQR) et la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée. On conclut que la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée est plus appropriée, puisqu’elle permet de traiter les problématiques de stabilité et de robustesse aux perturbations directement lors de la synthèse alors que la synthèse LQR ne le permet pas. Elle a aussi l’avantage d’offrir plus de flexibilité au niveau de l’architecture de la loi de commande.

On étend finalement les performances de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée, non seulement pour une position d’équilibre en vol stationnaire, mais pour un ensemble de points d’équilibre. En gardant la même technique, on développe, pour chacun de ces points d’équilibre, le modèle LTI associé et on cherche à faire en sorte que les performances soient rencontrées pour chacun des points. La dynamique du quadricoptère étant non linéaire, les modèles peuvent grandement varier et il devient difficile de rencontrer les performances sur l’ensemble avec des gains fixes.

Pour pallier à ce problème, on utilise un séquençement des gains de la loi de commande (*gain-scheduling*). Les gains dépendent alors des variables d’état caractérisant l’attitude du quadricoptère. En augmentant ainsi les degrés de liberté du contrôleur, on arrive à imposer de meilleures performances sur un ensemble plus grand de points d’équilibre. Un problème survient toutefois en utilisant cette technique. En effet, la fonction de séquençement introduit une non linéarité dans la loi de commande qui prend la forme de termes de couplage cachés

(TCC). Il faut alors explicitement les considérer dans le modèle linéarisé lors de la synthèse pour favoriser l'intégration de la loi de commande sur le système non linéaire et ainsi réduire les instabilités.

## ABSTRACT

Multicopters are used for all kinds of purposes, but limited by what current technology allows. New solutions must be developed in order to push these limits. One of the biggest limitations at the moment is the wind. Drones are often called upon to operate in external environments, particularly for the inspection of structures. However, their vulnerability to disturbances caused by a windy environment reduces their performance and limits their range of use. With this in mind, this project presents a solution to improve the resistance of a quadricopter to this type of disturbance and thus make the user less dependent on his environment during his activities.

The suggested approach aims to improve the wind resistance of the quadricopter's through a more robust control law. To do this, we first establish the non-linear equations characterizing the dynamics of a quadricopter in the wind. From these equations, we can establish the expression of the time-invariant linear state model (LTI) as a function of the equilibrium values of the drone.

An effective control law is then synthesized to hold position. We compare two different synthesis techniques ; the synthesis LQR and the structured synthesis  $\mathcal{H}_\infty$ . We conclude that the structured synthesis  $\mathcal{H}_\infty$  is more appropriate, since it allows to treat the problems of stability and robustness to disturbances directly during the synthesis while the LQR synthesis does not allow it. It also has the advantage of offering more flexibility in the architecture of the control law.

Finally, the performance of the structured synthesis  $\mathcal{H}_\infty$  is extended, not only for hovering, but for a set of equilibrium points. By keeping the same technique, we develop, for each of these equilibrium points, the associated LTI model and we try to ensure that the performances are met for each of the points. The dynamics of the quadricopter being non-linear, models can vary greatly and it becomes difficult to meet the performance on the whole set with fixed gains.

To overcome this problem, we use a scheduling of the control law gains. The gains depend on the state variables characterizing the quadricopter's attitude. By increasing the controller's degrees of freedom in this way, better performance can be imposed on a larger set of equilibrium points. However, a problem arises when using this technique. Indeed, the scheduling function introduces a non-linearity into the control law, which takes the form of hidden coupling terms. They must then be explicitly considered in the linearized model during synthesis to ensure the adequate integration of the control law on the non-linear system

and thus reduce instabilities.



## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iii
REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	vii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	ix
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xii
LISTE DES FIGURES . . . . .	xiii
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS . . . . .	xv
NOMENCLATURE . . . . .	xvi
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xvii
CHAPITRE 1 INTRODUCTION . . . . .	1
1.1 Contexte . . . . .	1
1.2 Objectifs de recherche . . . . .	2
1.3 Plan du mémoire . . . . .	2
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE . . . . .	4
2.1 Modélisation d'un multicoptère . . . . .	4
2.1.1 Dynamique du corps solide . . . . .	4
2.1.2 Application au multicoptère . . . . .	5
2.2 Modélisation du vent . . . . .	6
2.3 Lois de commande . . . . .	7
2.3.1 Méthodes de synthèse . . . . .	7
2.3.2 Commande robuste . . . . .	9
2.4 Séquencement des gains . . . . .	10
2.5 Termes de couplage cachés . . . . .	10
2.6 Conclusion de la revue de littérature . . . . .	11

CHAPITRE 3	MODÉLISATION	12
3.1	Modèle dynamique du multicoptère	12
3.1.1	Équations cinématiques	12
3.1.2	Équations de forces	14
3.1.3	Équations de moments	16
3.1.4	Dynamique des moteurs	18
3.2	Modèle de vent	18
3.2.1	Génération du vent	18
3.2.2	Forces et moments aérodynamiques	19
3.3	Équilibrage et linéarisation	27
3.3.1	Modèle d'état non linéaire complet	27
3.3.2	Modèle d'état linéarisé du multicoptère	28
3.3.3	Modèle d'état linéarisé du moteur	32
3.3.4	Modèle d'état linéarisé complet	33
CHAPITRE 4	COMPARAISON DES TECHNIQUES DE SYNTHÈSE LQR ET $\mathcal{H}_\infty$ EN MAINTIEN DE POSITION DANS UN ENVIRONNEMENT VENTEUX	35
4.1	Commande optimale LQR	35
4.2	Commande robuste	39
4.3	Simulations	44
4.3.1	Scénario de vol en maintien de position	48
4.3.2	Scénario de vol en suivi de trajectoire	51
4.3.3	Analyse des méthodes de synthèse LQR et $\mathcal{H}_\infty$	51
CHAPITRE 5	SYNTHÈSE $\mathcal{H}_\infty$ STRUCTURÉE MULTI-MODÈLES AVEC SÉQUEN- CEMENT DES GAINS	53
5.1	Architecture du contrôleur	54
5.2	Système multi-modèles et points d'équilibre	55
5.2.1	Paramétrisation des matrices de gains	56
5.2.2	Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ structurée multi-modèles	58
5.2.3	Termes de couplage cachés	61
5.2.4	Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ multi-modèles avec TCC	66
5.2.5	Simulations	67
5.2.6	Stabilité stationnaire du quadricoptère dans un environnement de vents changeant	68
5.2.7	Scénario de vol en suivi de trajectoire	70

5.2.8	Analyse de l'amélioration de la loi de commande avec le séquençage des gains . . . . .	70
CHAPITRE 6	CONCLUSION . . . . .	73
6.1	Synthèse des travaux . . . . .	73
6.2	Limitations de la solution proposée . . . . .	73
6.3	Améliorations futures . . . . .	74
RÉFÉRENCES	. . . . .	75
ANNEXES	. . . . .	81

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 4.1	Paramètres dynamiques du quadricoptère . . . . .	35
Tableau 4.2	Motor Parameters . . . . .	36
Tableau 4.3	Saturations . . . . .	47
Tableau 4.4	Analyse statistique . . . . .	48
Tableau 5.1	Vitesses aérodynamique $\mathbf{v}_{a,e}^b$ à l'équilibre dans $\mathcal{F}_b$ en m/s . . . . .	57
Tableau 5.2	Vitesse de rotation à l'équilibre des moteurs $\omega_e$ en rad/s . . . . .	57
Tableau 5.3	Requis pour la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ structurée . . . . .	59
Tableau 5.4	Critère de satisfaction $\mathcal{H}_\infty$ structurée selon la fonction de gains $f_i$ . .	60
Tableau 5.5	Norme $\mathcal{H}_\infty$ selon la fonction de gains . . . . .	67
Tableau 5.6	Niveau de satisfaction des contraintes $\mathcal{H}_\infty$ structurées . . . . .	67

## LISTE DES FIGURES

Figure 3.1	Définition du modèle du quadricoptère et des repères objet $\mathcal{F}_b$ et hélice $\mathcal{F}_{p,j}$ . . . . .	13
Figure 3.2	Méthode de mesure de la géométrie des hélices (Khan and Nahon, 2013). . . . .	20
Figure 3.3	Définition du repère $\mathcal{F}_{a'}$ . . . . .	21
Figure 4.1	Architecture de commande utilisée pour la synthèse LQR . . . . .	36
Figure 4.2	Réponses temporelles attendues pour la synthèse LQR . . . . .	40
Figure 4.3	Architecture de commande utilisée pour la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ structurée . . . . .	40
Figure 4.4	Gabarits imposés . . . . .	43
Figure 4.5	Réponses fréquentielles et pôles en boucle fermée avec le contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ structurée . . . . .	45
Figure 4.6	Réponses temporelles avec le contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ structurée . . . . .	46
Figure 4.7	Entrée de vent . . . . .	47
Figure 4.8	Position du quadricoptère pour un vol stationnaire lorsque soumis à une rafale . . . . .	49
Figure 4.9	Position du quadricoptère en 2D et 3D pour un vol stationnaire lorsque soumis à une rafale . . . . .	50
Figure 4.10	Vitesse de rotation $\omega_i$ des moteurs pour un vol stationnaire lorsque soumis à une rafale de vent . . . . .	50
Figure 4.11	Position du quadricoptère en 2D et 3D pour un suivi de trajectoire circulaire lorsque soumis à une rafale de vent . . . . .	51
Figure 5.1	Architecture non linéaire du contrôleur pour la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ structurée multi-modèles . . . . .	54
Figure 5.2	Comparaison des pôles des modèles linéaire et non linéaire . . . . .	61
Figure 5.3	Architecture de commande linéarisé pour la synthèse multi-modèles avec fonction de séquençement et TCC . . . . .	66
Figure 5.4	Entrée de vent . . . . .	68
Figure 5.5	Position du quadricoptère pour un vol stationnaire lorsque soumis à différentes rafales . . . . .	69
Figure 5.6	Position du quadricoptère en 2D et 3D pour un vol stationnaire lorsque soumis à différentes rafales . . . . .	70
Figure 5.7	Attitude du quadricoptère pour un vol stationnaire lorsque soumis à différentes rafales . . . . .	71

Figure 5.8	Vitesse de rotation $\omega_i$ des moteurs pour un vol stationnaire lorsque soumis à différentes rafales de vent . . . . .	72
Figure 5.9	Position du quadricoptère en 2D et 3D pour un suivi de trajectoire circulaire lorsque soumis à différentes rafales de vent . . . . .	72

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

BEMT	<i>Blade Element Momentum Theory</i>
CAO	Conception assistée par ordinateur
CM	Centre de masse
NWU	<i>North West Up</i>
FLU	<i>Front Left Up</i>
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i>
LTI	<i>Linear Time Invariant</i>
MCD	Matrice des cosinus directeur
NLM	Niveau de la mer
PID	proportionnel, intégral, dérivé
TCC	Termes de couplage cachés
WGN	<i>White Gaussian Noise</i>

## NOMENCLATURE

Dans cette section sont définies les notations utilisées dans ce mémoire.

### Variables

$x$	Un scalaire
$X$	Un point ou un paramètre
$\mathbf{x}$	Un vecteur
$\mathbf{X}$	Une matrice

### Indexation

$x_i$	$i^e$ élément du vecteur $\mathbf{x}$
$X_{i,j}$	élément de la $i^e$ ligne et de la $j^e$ colonne de la matrice $\mathbf{X}$

### Positions et vitesses

$\mathbf{p}_{A/i}$	position du point A dans $\mathcal{F}_i$
$\mathbf{p}_{A/B}$	position du point A par rapport au point B
$\mathbf{v}_{A/i}$	vitesse du point A dans $\mathcal{F}_i$
$\mathbf{v}_{A/i}^c$	projection de $\mathbf{v}_{A/i}$ dans $\mathcal{F}_c$
${}^b\dot{\mathbf{v}}_{A/i}$	dérivée de $\mathbf{v}_{A/i}$ dans $\mathcal{F}_b$
${}^b\dot{\mathbf{v}}_{A/i}$	dérivée de $\mathbf{v}_{A/i}$ dans $\mathcal{F}_b$ projeté dans $\mathcal{F}_c$
$\boldsymbol{\omega}_{b/i}$	vitesse de rotation instantanée de $\mathcal{F}_b$ par rapport à $\mathcal{F}_i$
$\boldsymbol{\omega}_{b/i}^c$	projection de $\boldsymbol{\omega}_{b/i}$ dans $\mathcal{F}_c$



**LISTE DES ANNEXES**

Annexe A	MATRICES DE GAINS MULTI-MODÈLES AVEC SÉQUENCEMENT	81
----------	---	----

## CHAPITRE 1 INTRODUCTION

### 1.1 Contexte

Au cours de la dernière décennie, l'industrie des drones a connu une énorme expansion. Du consommateur-amateur au chercheur chevronné, tout le monde y trouve son compte avec ces engins mécaniques. Encore aujourd'hui, le spectre d'utilisation des drones ainsi que la clientèle ne cessent de s'accroître. Comme le magazine scientifique Sciences & Vie le mentionnait dans son édition de Mai 2014 : « *US authorities estimate that more than ten thousand civil drones will be flying the US sky by 2020* ». Cette statistique démontre clairement la croissance de l'industrie ces dernières années, ce qui a notamment déjà permis à plusieurs compagnies de fabrication de drones de se positionner comme chef de file mondial. La compagnie française Parrot et son compétiteur chinois DJI en sont deux exemples.

Ces engins volants sans pilote prennent de nombreuses formes. Pour les drones de type multicoptères, on peut en trouver à trois, quatre, six ou huit hélices, mais il en existe bien d'autres moins conventionnels. À titre d'exemples, on peut mentionner les multicoptères équipés d'hélices à inclinaison variable qui permettent d'augmenter le nombre de degrés de liberté commandables par rapport aux multicoptères classiques, les *tailsitters* qui combinent les avantages du vol d'avancement et du vol stationnaire, l'aile volante, et il en existe bien d'autres encore. Comme il l'a été mentionné ci-dessus, la recherche et le développement ne cessent de croître dans ce domaine et il est fréquent de voir apparaître de nouvelles configurations sur le marché emportant avec elles un éventail de nouvelles perspectives d'applications.

Les drones les plus communs demeurent les multicoptères, en particulier les quadricoptères, qui sont désormais omniprésents dans plusieurs secteurs : agriculture, divertissement, environnement, média, secours, sécurité et transport. Ainsi, les quadricoptères sont souvent appelés à opérer en milieu extérieur pouvant présenter des perturbations de toutes sortes. On compte parmi celles-ci la présence d'obstacles, la variation de luminosité qui influence les images prises par une caméra, les interférences magnétiques qui perturbent les magnétomètres, les distorsions atmosphériques, etc. Toutefois, la perturbation dominante demeure la présence de vent. Il est donc primordial de développer une solution stable face à cette perturbation.

Bien que les drones haut de gamme opèrent très bien dans des milieux venteux, la majorité de ceux disponibles sur le marché va voir ses performances diminuées avec l'augmentation de la vitesse du vent. L'utilisation prédominante de contrôleurs PID sur les multicoptères bas de

gamme provoquent une vulnérabilité aux fortes rafales en raison de l'action proportionnelle de la loi de commande. L'utilisateur devient ainsi directement dépendant des conditions atmosphériques, souvent imprévisibles, ce qui provoque des soucis surtout logistiques au niveau de la planification des activités. Pour contrer ces problèmes, on propose dans ce travail d'explorer une solution simple, à architecture fixe, facile d'implantation et destinée à améliorer les performances générales du drone en milieu venteux.

Ainsi, au lieu d'utiliser des approches telles que la commande modale ou la commande optimale pour synthétiser une loi de commande, la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée sera favorisée. Cette approche issue de la théorie de la commande robuste se distingue des autres en rendant possible l'imposition de contraintes tant au niveau de la robustesse que des performances désirées, et ce, directement dans le domaine fréquentiel. Ce type de commande a l'avantage de montrer une amélioration en robustesse sur un large spectre de perturbations tout en maintenant de stricts critères de performances, et ce, pour plusieurs scénarios de perturbations différents tels qu'un vent constant ou des rafales de vent.

## 1.2 Objectifs de recherche

Ce projet s'inscrit dans l'amélioration des performances d'un quadricoptère dans un environnement venteux. L'objectif général consiste ainsi à concevoir un système de commande robuste pour la commande en position d'un quadricoptère soumis à de grands vents.

À partir de cet objectif, il est possible d'établir les trois objectifs spécifiques suivants qui permettent de préciser l'objectif général :

1. Établir le modèle dynamique du quadricoptère. Il est composé de la dynamique du drone et de celle des forces et moments perturbateurs ;
2. Synthétiser les lois de commande du multicoptère de façon à limiter l'influence des perturbations sur le drone et valider par simulation leurs performances pour plusieurs scénarios de perturbations ;
3. Étendre les performances du contrôleur synthétisé pour l'ensemble de l'enveloppe de vol.

## 1.3 Plan du mémoire

Le chapitre 2 présente un survol de la théorie utilisée pour la modélisation d'un corps solide, ainsi que des travaux effectués dans le domaine de la commande de systèmes dynamiques.

On aborde ensuite la modélisation du quadricoptère au chapitre 3. On y présente les équations

dynamiques qui en traduisent le mouvement. À partir de ces relations, on exprime le modèle d'état linéaire invariant dans le temps (LTI) en fonction des valeurs à l'équilibre des angles de roulis  $\phi$  et de tangage  $\theta$ . Dans ce même chapitre, on présente également la modélisation des forces et des moments aérodynamiques subis par un quadricoptère en présence de vent.

Au chapitre 4, on cherche à commander le quadricoptère en position et en direction. Pour ce faire, on utilise deux techniques de synthèse de loi de commande, soit la synthèse LQR par retour d'état et la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée par retour de sortie. Les deux techniques sont appliquées au modèle LTI précédemment obtenu pour une position d'équilibre en vol stationnaire. Les résultats des deux synthèses sont ensuite comparés.

Au chapitre 5, on reprend la technique de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée et on l'étend à l'ensemble de l'enveloppe de vol via un séquençement des gains qui se traduit par une loi de commande non linéaire fonction de variables endogènes du système. Afin de considérer la variation de la dynamique proche de l'équilibre provoquée par la non linéarité de la commande vis-à-vis des variables endogènes, les termes de couplage cachés (TTC) sont considérés dans le modèle LTI. Cela permet d'éviter l'instabilité de la loi de commande lorsqu'implantée sur le système non linéaire. Finalement, on termine au chapitre 6 par une conclusion qui résume le travail présenté dans ce mémoire et propose des pistes d'améliorations possible.

## CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

Ce chapitre se veut un état de l'art sur la modélisation et la commande des drones. On y présente d'abord les techniques de modélisation de la dynamique d'un multicoptère, ainsi que les forces et les moments intervenant dans le contexte de la commande en position d'un tel système. On poursuit en présentant différentes techniques de commande linéaire, plus précisément, la synthèse LQR et la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ . On termine en présentant la technique de séquençement des gains et le problème des termes de couplage cachés qui en découle.

### 2.1 Modélisation d'un multicoptère

#### 2.1.1 Dynamique du corps solide

L'efficacité des techniques de commande classiques par opposition aux techniques de commande sans modèle est intrinsèquement liée à une modélisation adéquate de la dynamique du système. Il incombe alors de déterminer précisément les équations différentielles caractérisant le mouvement du système. Lorsque l'on parle d'équations du mouvement d'un corps rigide, plusieurs approches sont envisageables dont :

- l'approche newtonienne ;
- la conservation de l'énergie ;
- les équations de d'Alembert ;
- l'approche lagrangienne.

Parmi celles-ci, les plus utilisées demeurent les approches newtonienne et lagrangienne.

Newton a d'abord établi les bases de la dynamique du corps rigide en posant ses lois du mouvement. Sa deuxième loi du mouvement en translation, et son corollaire en rotation mieux connu comme la théorie du moment cinétique, permettent d'évaluer les six équations scalaires décrivant le mouvement d'un corps solide en trois dimensions (Greenwood, 2006). Cette approche intuitive est surtout employée pour les systèmes simples, puisqu'elle a le désavantage de vite devenir laborieuse avec les systèmes plus complexes, comme les systèmes multicorps. En effet, pour les systèmes à plusieurs corps/membrures, cette méthode nécessite une connaissance des forces de réaction au niveau des jonctions, ce qui n'est pas toujours aisé à évaluer.

Une méthode qui pallie à ce problème a été développée cent ans plus tard par Lagrange sous la forme des équations d'Euler-Lagrange. Celles-ci sont une reformulation des lois de Newton basée sur le principe de moindre action. Cette formulation permet de travailler

avec un système en tant qu'entité unique sans avoir à le démembrer pour en connaître les efforts internes. Ainsi, cette approche définit le Lagrangien comme la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système. Les équations du mouvement sont obtenues par la dérivation de cette grandeur par rapport aux variables généralisées du système et leurs dérivées (Greenwood, 2006). Cette méthode a l'avantage de travailler avec des grandeurs scalaires, soit les énergies, et sa résolution peut être faite en fonction de n'importe quel choix de variables généralisées.

Pour la modélisation d'un multicoptère, les deux techniques sont valides : (Altug et al., 2002) pour l'approche newtonienne et (Bouabdallah et al., 2004; Raffo et al., 2010) pour l'approche lagrangienne. Dans ce mémoire, les équations de Newton ont toutefois été favorisées.

### 2.1.2 Application au multicoptère

À des fins de commande, il est souvent essentiel de connaître la position en coordonnées cartésiennes et l'attitude du drone dans un repère dit inertiel. Ces variables ou leurs dérivées n'interviennent cependant pas explicitement dans la forme de base des équations de Newton telle qu'utilisées dans le présent travail. Celles-ci sont évaluées dans un repère propre au corps solide et son orientation varie avec l'attitude du drone.

Pour relier l'expression des vitesses en translation dans ces deux repères, l'équation de navigation est le plus souvent utilisée. Celle-ci est basée sur la définition des angles d'Euler  $\Phi = [\phi \ \theta \ \psi]^T$ , soit trois rotations successives d'angle  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$  autour de certains axes particuliers de façon à exprimer un vecteur initialement dans le repère propre au corps en un vecteur inertiel comme Raffo et al. (2010).

Pour relier l'expression des vitesses angulaires dans ces deux repères, trois approches basées sur différentes représentations de la matrice de rotation sont envisageables. En fonction de la représentation choisie, on trouve :

- l'équation cinématique d'Euler ;
- l'équation cinématique de Poisson ;
- l'équation cinématique du quaternion.

L'utilisation de l'équation cinématique d'Euler et de l'équation cinématique du quaternion est prédominante dans la littérature. D'abord, l'utilisation de l'équation cinématique d'Euler est intuitive et facile. Basée sur la représentation de l'attitude par les angles d'Euler, elle fait cependant apparaître une singularité mathématique si l'angle  $\theta = \pm 90^\circ$ . Elle demeure toutefois valide et largement utilisée pour la plupart des multicoptères œuvrant dans un domaine loin de ces points critiques (Raffo et al., 2010). Ensuite, l'équation du quaternion est également largement utilisée (Tayebi and McGilvray, 2004). Cette technique ne présente

pas de singularité et introduit seulement quatre équations différentielles (contrairement à trois pour l'équation d'Euler), ce qui justifie son utilisation surtout pour des applications en vol acrobatique ou pour des manœuvres agressives.

Jusqu'ici ont été présentées les différentes approches pour modéliser la dynamique d'un corps libre à six degrés de liberté. Un multicoptère en vol est par contre soumis à des forces et des moments dus aux actionneurs, aux effets inertiels, aux effets aérodynamiques, etc. Il s'agit donc de déterminer et de quantifier le plus fidèlement possible ces forces et ces moments externes.

Notons d'abord les forces et les moments aérodynamiques générés par la rotation des hélices, soit la poussée et la traînée induite. Il est possible d'exprimer ces forces et ces moments en fonction de la vitesse de rotation pour une géométrie d'hélice donnée (McCormick, 1995; Leishman, 2006). Cette relation dépend donc des coefficients de poussée (*thrust*) et de traînée (*drag*) associés à cette géométrie. Ces paramètres peuvent être obtenus expérimentalement ; on retrouve d'ailleurs sur le marché des bancs de tests destinés à cet effet. Il est sinon possible de trouver en libre accès ces paramètres en fonction des dimensions d'une hélice, par exemple, la base de données (Brandt et al., 2005) issue des travaux de (Brandt and Selig, 2011) et (Deters et al., 2014) pour lesquels des essais plus poussés ont été effectués en soufflerie pour un large éventail d'hélices différentes. On note également l'effet d'autres moments comme les moments gyroscopiques et les forces inertielles dues à la rotation des hélices (Meriam and Kraige, 2012).

La réponse d'un moteur à une commande n'est pas instantanée et dépend des différents paramètres du moteur, notamment l'inductance, la résistance, l'inertie et les frottements (Bouabdallah et al., 2004). Il est donc pertinent d'inclure dans le modèle du multicoptère la dynamique des moteurs généralement définie par les équations des moteurs DC (Bolton, 2003). L'intérêt d'un tel modèle apparaît surtout pour les drones de grande envergure utilisant des moteurs plus puissants. Pour ceux-ci, le temps de réponse devient plus long et affecte considérablement la performance de la loi de commande. On peut alors considérer la dynamique des moteurs lors de la synthèse de la loi de commande et imposer des contraintes fréquentielles supplémentaires.

## 2.2 Modélisation du vent

Pour un drone évoluant dans un environnement venteux, des forces aérodynamiques non négligeables doivent être considérées au niveau de la modélisation.

Généralement, on prend pour acquis un coefficient de traînée  $C_d$  constant peu importe l'angle

d'incidence de la vitesse aérodynamique. Il en découle une force de traînée appliquée au centre de masse (CM) du drone. L'hypothèse d'un centre de pression confondu au centre de masse donne un moment de force nul. Ainsi la force aérodynamique appliquée sur le drone est modélisée par l'équation générale de la traînée  $D = \bar{q} C_d A$  avec  $\bar{q}$  la pression dynamique,  $C_d$  le coefficient de traînée et  $A$  la surface exposée (Anderson, 2010).

Certains modèles plus avancés permettent d'évaluer plus précisément et localement l'effet de ce vent. Khan and Nahon (2015) proposent ainsi un modèle qui permet de modéliser l'interaction entre un vent oblique et une hélice en rotation. Il utilise la *Blade Element Momentum Theory* (BEMT) attribuable à Glauert (1935) qui représente une combinaison de la *Momentum Theory* et de la *Blade Element Theory* de William Froude émises à la fin du 19<sup>e</sup> siècle. Il s'agit d'une méthode numérique qui itère sur la valeur des paramètres inconnus jusqu'à l'obtention d'un modèle satisfaisant les deux théories.

Cette modélisation s'avère utile pour reproduire de façon réaliste l'interaction entre le drone et un vent en simulation. Elle est toutefois inefficace telle que présentée au niveau de la synthèse de loi de commande avec les techniques classiques. En effet, il s'agit d'une résolution numérique pour laquelle il n'y a pas de solution analytique.

De plus, le vent n'est pas une quantité stable. En effet pour une vitesse du vent nominale, la valeur réelle de la vitesse du vent oscille. La modélisation la plus acceptée de cette oscillation est celle développée par Dryden (Dod, 1997).

## 2.3 Lois de commande

Afin de pouvoir commander l'état du multicoptère, on cherche à trouver une loi de commande qui en assure la stabilité en boucle fermée. Les solutions les plus populaires pour atteindre cet objectif sont l'utilisation de contrôleurs proportionnel, intégral, dérivé (PID). Ainsi, par bouclages successifs, on arrive, en choisissant judicieusement la valeur des gains des différentes boucles, à assurer cette stabilité.

Il existe plusieurs méthodes de synthèse qui permettent d'évaluer ces valeurs de façon à, non seulement assurer la stabilité, mais à garantir un certain niveau de performance du système. On en présente quelques unes à la section suivante.

### 2.3.1 Méthodes de synthèse

Parmi les techniques de synthèse de loi de commande les plus connues, on compte la commande LQR (Anderson, 2010) et le placement de pôles ou de structures propres (Liu and



Patton, 1998). Ces deux techniques de commande linéaire sont largement utilisées dans l'industrie notamment en raison de leur facilité d'utilisation et d'implantation.

La commande LQR se veut une application de la théorie de la commande optimale aux systèmes (LTI). Celle-ci permet de trouver une solution par retour d'état minimisant un certain critère quadratique qui pondère les états et la commande. La synthèse LQR consiste en la résolution d'une équation de Riccati. Cette dernière peut être résolue efficacement de manière numérique (Bouabdallah et al., 2004). La théorie de la commande LQR peut aussi être étendue à une commande par retour de sortie. Contrairement au retour d'état, il s'agit pour le retour de sortie de trouver une solution qui rencontre trois conditions nécessaires pour satisfaire le critère d'optimalité. Un tel problème n'est cependant pas aussi simple à résoudre et passe par un processus itératif. Différentes approches ont été développées pour arriver à résoudre ce problème comme les algorithmes d'optimisation décrits dans (Nelder and Mead, 1965; Moerder and Calise, 1985; Davidon, 1991).

Les techniques de synthèse classique comme la commande LQR ont le désavantage de n'être applicables qu'aux systèmes linéaires. Quand on parle de drones, la dynamique traduisant leur mouvement est hautement non linéaire. La synthèse demeure toutefois possible sur une linéarisation du système autour d'un point d'équilibre. On peut alors considérer que près de ce point, le système non linéaire a un comportement s'approchant du système linéarisé. Celui-ci peut cependant devenir imprévisible ou même instable quand le drone s'en éloigne.

Dans cette optique, il existe différentes techniques de commande non linéaire qui attaquent directement le problème sur l'ensemble de la plage d'opération du système. On pense entre autres au *sliding mode control* (L'Affitto et al., 2018; Lee et al., 2009), ou au *backstepping* (Lee et al., 2010; Bouabdallah and Siegwart, 2007; Azinheira and Moutinho, 2008). Ces techniques dont la stabilité est basée sur une analyse du modèle ont par contre le désavantage de ne pas pouvoir garantir la robustesse face aux incertitudes paramétriques et aux perturbations; celles-ci ne peuvent pas toujours être modélisées précisément.

En ce qui a trait au problème de robustesse d'un drone face au vent, ces méthodes ne sont pas véritablement adaptées. L'approche générale pour contourner cette lacune vise à ajouter un terme de compensation dans la loi de commande (Waslander and Wang, 2009; Mokhtari and Benallegue, 2004). Ainsi, faute de modèle, on peut estimer à l'aide d'un observateur l'effet de la perturbation sur le drone. L'obtention d'une estimation décente du vent n'est cependant pas triviale, d'où l'intérêt de la commande robuste qui, elle, attaque la problématique de la robustesse sans avoir à changer l'architecture de la loi de commande.

Dans (Tran et al., 2015), l'auteur attaque le problème de robustesse au vent sans utiliser un terme de compensation. Il utilise la technique de synthèse LQR en pondérant fortement la

position et l’erreur en position de façon à maintenir un vol stationnaire malgré la présence de vent. Il présente ensuite les performances en simulation de la loi de commande synthétisée dans un environnement venteux en la comparant avec une loi de commande nominale PID. Il est à noter que d’autres articles abordant aussi spécifiquement cette problématique n’ont pas été trouvés.

### 2.3.2 Commande robuste

La commande robuste prend racine avec les travaux de Zames (1981) pour la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ , suivi des travaux de Doyle (1982) pour la  $\mu$ -synthèse et correspond à une approche applicable aux systèmes linéaires basée sur une analyse fréquentielle de la sensibilité des états vis-à-vis des incertitudes. Elle permet ainsi d’imposer des contraintes sous forme de gabarits fréquentiels entre certaines entrées et certaines sorties du système. Les résultats d’une telle synthèse se résument en l’obtention d’une loi de commande sous forme de modèle d’état dont l’ordre peut être aussi grand que l’ordre du système additionné des filtres de performance. Pour les systèmes d’ordre élevé, cela peut représenter un défi d’implantation considérable.

La synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée (Gahinet and Apkarian, 2011) se veut une amélioration de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  classique en permettant d’imposer une structure *a priori* à la loi de commande et ainsi garder minimal l’ordre du contrôleur. Elle permet aussi d’imposer des contraintes, outre les gabarits fréquentiels, comme une restriction sur le placement des pôles ou des marges de gain et de phase minimales. Cette technique a déjà su montrer son efficacité sur des applications comme la commande d’un avion (Lhachemi et al., 2014), la commande d’engins spatiaux (Dubanchet et al., 2015) et la commande de multicoptères (Nguyen et al., 2017).

Parmi les outils de synthèse robuste disponibles dans le *Robust Control Toolbox* de MATLAB®, on trouve la fonction `sys tune` qui est une implantation de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée. Elle utilise les algorithmes d’optimisation non lisse décrits dans (Apkarian and Noll, 2006, 2007) et l’algorithme de Bruinsma and Steinbuch (1990) pour calculer la norme  $\mathcal{H}_\infty$ . Les possibilités de la fonction `sys tune` sont, elles, décrites dans (Apkarian et al., 2014, 2015)

L’avantage de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée est la possibilité d’attaquer le problème directement dans le domaine fréquentiel comme Nguyen et al. (2017). Cette méthode peut prendre en compte différents types de contraintes qui sont fixées *a priori*, des contraintes qui ne pourraient pas être traitées autrement aussi aisément. Dans le contexte de la commande d’un drone évoluant dans un environnement venteux, cette technique est fort avantageuse. En effet, on connaît le comportement fréquentiel du vent, mais en modéliser précisément la dynamique est plus difficile.

## 2.4 Séquencement des gains

Pour étendre la stabilité et les performances du drone, non seulement autour d'un point d'opération unique, mais sur toute son enveloppe de vol, une approche par séquencement de gains peut être utilisée (Lawrence and Rugh, 1995; Rugh and Shamma, 2000). Celle-ci consiste en la synthèse d'un ensemble de lois de commande associé à un ensemble de points d'équilibre. Il est alors possible d'évaluer une loi de commande en fonction du point d'opération par interpolation des gains synthétisés *a priori* (Rugh and Shamma, 2000; Leith and Leithead, 2000). On note l'application d'une telle technique à la commande en tangage d'un missile (Nichols et al., 1993). Cette technique n'offre par contre aucune garantie quant à la stabilité du bouclage entre deux points d'opération. C'est pour cette raison qu'il est nécessaire d'en valider la stabilité *a posteriori* expérimentalement (Shamma and Athans, 1992). (Lawrence and Rugh, 1990) et (Shamma and Athans, 1991) arrivent à prouver la stabilité entre les points d'opération pour certains systèmes, mais cette stabilité n'est toutefois assurée que pour des variations suffisamment lentes du point d'opération.

Comme on vient de le mentionner, la stabilité n'est pas nécessairement garantie entre deux points de synthèse (Stilwell and Rugh, 2000) et l'évolution des gains peut également présenter des discontinuités. Aussi, pour la commande de système d'ordre plus élevé, considérant que les gains sont obtenus par interpolation dans des tables de référence, le calcul peut vite devenir lourd et présenter des problèmes d'implantation.

Pour palier à ces problèmes, des solutions ont été développées pour fixer *a priori* la structure de la fonction de séquencement des gains (Lhachemi et al., 2017). En choisissant judicieusement les paramètres de cette fonction, il est possible de grandement simplifier la loi de commande à une simple équation non linéaire plutôt que d'avoir à interpoler entre des matrices.

## 2.5 Termes de couplage cachés

Bien que le *Robust Control Toolbox* de MATLAB® fournisse une solution sous la forme de la fonction `tunableSurface` pour évaluer les matrices de gains en fonction d'un séquencement fixé *a priori*, un problème demeure quand on l'applique pour une architecture de commande non linéaire fonction de variables endogènes au système. Cette méthode ne considère pas les termes différentiels issus de la linéarisation de la loi de commande par rapport aux variables endogènes ; ce sont les termes de couplage cachés (TCC). En effet, la linéarisation du modèle en boucle fermée fait apparaître ces termes parasites qui modifient alors les propriétés locales obtenues lors de la synthèse initiale du contrôleur. Une telle différence mène à une perte

d'efficacité et possiblement à l'instabilité quand la loi de commande est implantée sur le système non linéaire (Rugh and Shamma (2000)).

Plusieurs techniques peuvent être employées pour considérer ces TCC. On recense deux types d'approches pour gérer leurs effets. La première est de ne considérer les TCC qu'*a posteriori*. Ainsi, le *dynamical gain-scheduling* se veut une relaxation du critère sur la variation des variables de séquençement permettant ainsi l'interpolation des gains pour une variation rapide de la dynamique (Yang et al., 2010, 2015). Il est également possible de considérer les TCC directement lors de la synthèse de la loi de commande. En choisissant judicieusement l'architecture de commande, on peut faire en sorte d'éviter l'apparition de ces termes différentiels (Lawrence and Rugh, 1995; Rugh and Shamma, 2000; Lawrence, 2001). Ces techniques reposent sur la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles qui a cependant l'effet d'ajouter de fortes contraintes sur l'architecture de commande ou le choix des fonctions de séquençement. Le deuxième type d'approches consiste en une implantation générique qui évite l'apparition des TCC ce qui permet l'utilisation des techniques de synthèse classiques. Il s'agit du *velocity-based algorithm* (Kaminer et al., 1995).

Comme dans Lhachemi et al. (2016a,b, 2017), il est possible de créer un modèle linéaire qui reproduit fidèlement la dynamique linéarisée du système non linéaire en boucle fermée en considérant explicitement les TCC. Il est ensuite possible d'appliquer les techniques de commande de la même façon que pour n'importe quel autre système linéaire. Ainsi, on considère l'effet de la variation de la dynamique directement au niveau de la synthèse.

## 2.6 Conclusion de la revue de littérature

Le spectre toujours grandissant de possibilités qu'offrent les multicoptères ne vient pas sans une évolution conjointe de la technologie qui s'y rattache, celle-ci leur permettant d'être toujours plus performants, plus versatiles et plus efficaces. Dans cet optique, on cherche dans ce mémoire à appliquer les récentes avancées dans le domaine de la commande à un quadricoptère et d'en approfondir les enjeux.

## CHAPITRE 3    MODÉLISATION

Dans ce chapitre sont présentées les équations décrivant la dynamique d'un quadricoptère. On y présente également la définition d'un point d'équilibre et la linéarisation du système autour de celui-ci de façon à obtenir une représentation par modèle d'état LTI. Cette représentation est utilisée dans les chapitres subséquents pour la synthèse des lois de commande.

### 3.1    Modèle dynamique du multicoptère

Deux référentiels sont utilisés pour décrire le mouvement du multicoptère, soit le repère inertiel  $\mathcal{F}_i = \{O_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i\}$  et le repère objet  $\mathcal{F}_b = \{O_b, \mathbf{x}_b, \mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b\}$ , où  $O_i$  est situé au point de référence local et  $O_b$  au CM du multicoptère que l'on considère confondu avec le centre de gravité. Ces repères respectent pour le premier la convention *Norht West Up* (NWU) et le second la convention *Front Left Up* (FLU) comme illustré dans la figure 3.1. Les équations cinématiques de navigation et d'Euler permettent d'établir une relation entre les deux repères. Les équations dynamiques du multicoptère sont présentées subséquemment. Les notations des vecteurs sont définies dans la Nomenclature de ce mémoire.

#### 3.1.1    Équations cinématiques

Pour relier un repère cartésien quelconque à un second repère, on effectue trois rotations successives d'angle  $\psi$ ,  $\theta$  et  $\phi$  (les angles d'Euler) respectivement selon les axes  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{x}$  de repères intermédiaires tel que présentés dans cette section.

Dans ce mémoire, on utilise cette définition pour passer du repère inertiel  $\mathcal{F}_i$  vers le repère objet  $\mathcal{F}_b$ . Ainsi, une première rotation d'angle  $\psi$  est effectuée selon l'axe  $\mathbf{z}_i$  en utilisant la matrice de rotation  $\mathbf{R}_{\mathbf{z}_i}(\psi)$ . Une seconde rotation est effectuée selon l'axe  $\mathbf{y}_1$  du repère intermédiaire  $\mathcal{F}_1$  avec la matrice de rotation  $\mathbf{R}_{\mathbf{y}_1}(\theta)$ , puis une troisième selon l'axe  $\mathbf{x}_2$  du repère intermédiaire  $\mathcal{F}_2$  avec la matrice de rotation  $\mathbf{R}_{\mathbf{x}_2}(\phi)$ . Ce qui nous donne les trois matrices de rotation :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{z}_i}(\psi) = \begin{bmatrix} c_\psi & s_\psi & 0 \\ -s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{\mathbf{y}_1}(\theta) = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & -s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{\mathbf{x}_2}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\psi & s_\psi \\ 0 & -s_\psi & c_\psi \end{bmatrix}$$

Figure 3.1 Définition du modèle du quadricoptère et des repères objet  $\mathcal{F}_b$  et hélice  $\mathcal{F}_{p,j}$

On obtient ainsi la matrice de rotation d'Euler (*matrice des cosinus directeur* (MCD))

$$\mathbf{E} = \mathbf{R}_{\mathbf{x}_2}(\phi) \mathbf{R}_{\mathbf{y}_1}(\theta) \mathbf{R}_{\mathbf{z}_i}(\psi)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & c_\theta s_\psi & -s_\theta \\ s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi c_\theta \\ c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

où  $c_x := \cos x$  et  $s_x := \sin x$ .

En se basant sur cette définition, on peut exprimer un vecteur quelconque  $\mathbf{v}$  initialement dans le repère inertiel dans le repère object, et vice versa :

$$\mathbf{v}^b = \mathbf{E} \mathbf{v}^i \text{ et } \mathbf{v}^i = \mathbf{E}^\top \mathbf{v}^b$$

en rappelant que  $\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E}^\top$ , car les matrices de rotation sont orthogonales.

L'équation cinématique de navigation permet ainsi d'exprimer la dérivée de la position du CM dans  $\mathcal{F}_i$ ,  $\dot{\mathbf{p}}_{cm/i}^i = [x \ y \ z]^\top$ , en fonction de son expression dans  $\mathcal{F}_b$ ,  $\mathbf{v}_{cm/i}^b = [u \ v \ w]^\top$  :

$${}^i \dot{\mathbf{p}}_{cm/i}^i = \mathbf{E}^\top \mathbf{v}_{cm/i}^b \quad (3.2)$$

De façon similaire, l'équation cinématique d'Euler permet quant à elle d'exprimer la dérivée des angles d'Euler  $\dot{\Phi} = [\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^\top$  en fonction du vecteur vitesse de rotation de  $\mathcal{F}_b$  par rapport à  $\mathcal{F}_i$ ,  $\omega_{b/i}^b = [p \ q \ r]^\top$ , exprimé dans  $\mathcal{F}_b$  :

$$\dot{\Phi} = \mathbf{H} \omega_{b/i}^b \quad (3.3)$$

avec

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & s_\phi t_\theta & c_\phi t_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi / c_\theta & c_\phi / c_\theta \end{bmatrix}$$

où  $t_x := \tan x$

### 3.1.2 Équations de forces

On considère le quadricoptère comme un corps rigide. On peut donc négliger les déformations et traiter le drone comme une seule entité. Les équations de Newton permettent alors de décrire la dynamique du quadricoptère en translation par une somme des forces, et en rotation par une somme des moments. Ainsi, l'application de la deuxième loi de Newton permet de

relier la force totale appliquée au drone à son accélération linéaire  $\mathbf{a}$  et sa masse  $m$  :

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}$$

Dans le cas du quadricoptère que l'on peut considérer comme un corps rigide, l'accélération linéaire (de façon équivalente, celle du CM) est donnée par la dérivée de la vitesse par rapport au repère inertiel (repère fixe) :

$$\mathbf{a} = {}^i\dot{\mathbf{v}}_{cm/i}$$

L'accélération peut aussi être exprimée par rapport à la vitesse linéaire dérivée par rapport à  $\mathcal{F}_b$  ; il est alors nécessaire de considérer la formule de Coriolis qui relie les dérivées dans différents repères grâce à la vitesse de rotation instantanée  $\boldsymbol{\omega}_{b/i}$ . Celle-ci peut alors être exprimée comme :

$$\mathbf{a} = {}^b\dot{\mathbf{v}}_{cm/i} + \boldsymbol{\omega}_{b/i} \times \mathbf{v}_{cm/i}$$

Cela permet donc de poser l'équation de la force projetée dans  $\mathcal{F}_b$  :

$$\mathbf{F}^b = m \left( {}^b\dot{\mathbf{v}}_{cm/i}^b + \boldsymbol{\omega}_{b/i}^b \times \mathbf{v}_{cm/i}^b \right) \quad (3.4)$$

où  $\mathbf{F}^b = \begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}^\top$  représente la force totale agissant sur le drone en  $O_b$  et correspond à la somme des forces gravitationnelle  $\mathbf{F}_g^b$ , de poussée aérodynamique  $\mathbf{F}_t^b$ , et aérodynamique  $\mathbf{F}_a^b$  :

$$\mathbf{F}^b = \mathbf{F}_g^b + \mathbf{F}_t^b + \mathbf{F}_a^b$$

La définition de ces forces est donnée subséquentement. Comme pour la vitesse linéaire, on peut exprimer la force gravitationnelle dans  $\mathcal{F}_b$  avec :

$$\mathbf{F}_g^b = m \mathbf{E} \mathbf{g}^i \quad , \quad \mathbf{g}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g_0 \end{bmatrix}^\top$$

où  $g_0$  est l'accélération gravitationnelle.

Selon Leishman (2006), on peut modéliser les forces de poussées en fonction de  $k_t$ , la constante de poussée des hélices, et  $\omega_i$ , la vitesse de rotation de l'hélice  $i$ . Son expression est alors :

$$\mathbf{F}_t^b = \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{t,i}^b \quad , \quad \mathbf{F}_{t,i}^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_t \omega_i^2 \end{bmatrix}^\top$$

On définit la force aérodynamique comme la résultante de la traînée générée par le corps du quadricoptère  $\mathbf{F}_{drag}^b$ , et des forces générées par l'interaction entre le vent et la rotation des



hélices  $\mathbf{F}_{prop}^b$ . Ces dernières sont décrites plus en détail à la section 3.2.2.

$$\mathbf{F}_a^b = \mathbf{F}_{prop}^b + \mathbf{F}_{drag}^b$$

La traînée, quant à elle, est donnée par l'équation générale (Anderson, 2010) en fonction de la vitesse aérodynamique  $\mathbf{v}_a$  de norme  $V_a = \|\mathbf{v}_a\|_2$  :

$$\mathbf{F}_{drag}^b = k_a \mathbf{v}_a^b V_{a,e} \quad , \quad k_a = \frac{1}{2} \rho_0 C_d A$$

où les constantes  $\rho_0$ , la masse volumique de l'air au niveau de la mer (NLM),  $C_d$ , le coefficient de traînée aérodynamique et  $A$ , l'aire effective peuvent être regroupées en une constante  $k_a$  que l'on nomme la constante de traînée. Les valeurs  $C_d$  et  $A$  sont fonction de la géométrie du quadricoptère. On note :

$$\mathbf{v}_a^b = \begin{bmatrix} u_a & v_a & w_a \end{bmatrix}^\top = \mathbf{v}_w^b - \mathbf{v}_{cm/i}^b$$

la vitesse du drone par rapport à la masse d'air et

$$\mathbf{v}_w^b = \begin{bmatrix} u_w & v_w & w_w \end{bmatrix}^\top$$

la vitesse du vent dans  $\mathcal{F}_b$ . Cette dernière est définie à la Section 3.2.1.

Il existe plusieurs méthodes pour évaluer expérimentalement ou théoriquement ces paramètres. On choisit ici d'utiliser les résultats de Tran (2015) obtenus expérimentalement pour le drone Pelican de AscTec (2017). Les résultats ont été grossièrement validés avec une analyse par éléments finis sur le modèle de conception assistée par ordinateur (CAO) de de Athayde Guimarães (2014) effectuée à l'aide du logiciel Solidworks 2017.

### 3.1.3 Équations de moments

À partir de la deuxième loi de Newton, on déduit le théorème du moment cinétique qui, projeté dans  $\mathcal{F}_b$ , permet de relier le moment total appliqué au CM du drone  $\mathbf{M}^b$ , en fonction de l'accélération angulaire de ce dernier :

$$\mathbf{M}^b = \mathbf{I}^b {}^b\dot{\boldsymbol{\omega}}_{b/i}^b + \boldsymbol{\omega}_{b/i}^b \times \mathbf{I}^b \boldsymbol{\omega}_{b/i}^b \quad (3.5)$$

avec  $\mathbf{M}^b = \begin{bmatrix} M_x & M_y & M_z \end{bmatrix}^\top$  et  $\mathbf{I}^b = \text{diag}(I_{xx}, I_{yy}, I_{zz})$  le tenseur d'inertie du corps dans  $\mathcal{F}_b$ . Ce dernier est considéré comme une matrice diagonale en raison de la double symétrie du

quadricoptère selon les plans  $\mathbf{x}_b - \mathbf{z}_b$  et  $\mathbf{y}_b - \mathbf{z}_b$ . Le vecteur  $\mathbf{M}^b$  est donné par :

$$\mathbf{M}^b = \mathbf{M}_t^b + \mathbf{M}_q^b + \mathbf{M}_j^b + \mathbf{M}_g^b + \mathbf{M}_a^b$$

où  $\mathbf{M}_t^b$  représente le moment dû aux forces de poussée  $\mathbf{F}_{t,i}^b$  et au bras de levier  $l$ ,  $\mathbf{M}_q^b$  le moment dû à la traînée des hélices,  $\mathbf{M}_j^b$  le moment résultant des moments inertiels des pièces rotatives des moteurs,  $\mathbf{M}_g^b$  le moment dû aux effets gyroscopique et  $\mathbf{M}_a^b$  la résultante des moments aérodynamiques générés par le vent. La définition de ces moments est donnée subséquemment.

Le couple de réaction dû aux forces de poussée correspond aux moments de forces générés par la poussée  $\mathbf{F}_{t,i}$  et la position  $\mathbf{r}_i^b$  de chaque hélice :

$$\mathbf{M}_t^b = \sum_{i=1}^4 \mathbf{r}_i^b \times \mathbf{F}_{t,i}^b \quad , \quad \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^b & \mathbf{r}_2^b & \mathbf{r}_3^b & \mathbf{r}_4^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & -l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & -l \\ h_p & h_p & h_p & h_p \end{bmatrix}$$

où les grandeurs  $l$  et  $h_p$  sont illustrées à la figure 3.1.

Selon (Leishman, 2006), on peut modéliser le moment induit dû la traînée des hélices en fonction de  $k_q$ , la constante de traînée des hélices et  $\omega_i$ , la vitesse de rotation de l'hélice  $i$ . Son expression est alors :

$$\mathbf{M}_q^b = \sum_{i=1}^4 \boldsymbol{\tau}_i^b \quad , \quad \boldsymbol{\tau}_i^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -s_i k_q \omega_i^2 \end{bmatrix}^\top$$

où  $s_i$  désigne le sens de rotation de l'hélice  $i$  par rapport à l'axe  $\mathbf{z}_b$ , *i.e.*,  $+1$  pour une rotation antihoraire ou  $-1$  pour une rotation horaire.

Le moment inertiel qui s'oppose à la rotation des pièces des moteurs (rotor, arbre et hélice d'inertie totale  $J_m$ ) et des hélices est donné par :

$$\mathbf{M}_j^b = \sum_{i=1}^4 \mathbf{J}_i^b \quad , \quad \mathbf{J}_i^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -s_i J_m \dot{\omega}_i \end{bmatrix}^\top$$

Le moment gyroscopique qui s'oppose à la variation de l'axe de rotation d'un corps est donné par :

$$\mathbf{M}_g^b = \sum_{i=1}^4 \boldsymbol{\sigma}_i^b \times \boldsymbol{\omega}_{b/i}^b \quad , \quad \boldsymbol{\sigma}_i^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & s_i J_m \omega_i \end{bmatrix}^\top$$

Enfin, le moment aérodynamique  $\mathbf{M}_a^b$  sera réduit au moment  $\mathbf{M}_{prop}^b$  généré par l'interaction entre le vent et la rotation des hélices, soit  $\mathbf{M}_a^b = \mathbf{M}_{prop}^b$ . Ce dernier est décrit plus en détail

à la Section 3.2.2.

### 3.1.4 Dynamique des moteurs

Une modélisation possible de la dynamique de chacun des moteurs  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  est obtenue de (Bolton, 2003) en utilisant les équations électrique et mécanique suivantes :

$$\begin{cases} L \frac{di_j}{dt} = V_j - k_e \omega_j - R i_j \\ J_m \frac{d\omega_j}{dt} = k_m i_j - b_m \omega_j - k_q \omega_j^2 \end{cases} \quad (3.6)$$

où  $L$  désigne l'inductance,  $k_e$  la constante de force électromagnétique,  $R$  la résistance,  $k_m$  la constante de moment des moteurs, et  $b_m$  la constante de frottement visqueux. Les états  $i_j$  et  $\omega_j$  sont respectivement le courant du circuit et la vitesse de rotation du moteur  $j$ . La commande envoyée au moteur  $j$  correspond au voltage  $V_j$ .

## 3.2 Modèle de vent

Cette section présente la modélisation des forces et des moments aérodynamiques  $\mathbf{F}_a^b$  et  $\mathbf{M}_a^b$  causés par le déplacement du quadricoptère dans une masse d'air de masse volumique  $\rho_0$  et de la présence de vent. Ces deux phénomènes sont considérés comme des entrées perturbatrices. Les résultats obtenus dans cette section servent à reproduire un environnement de vent réaliste lors des simulations. Cet objectif est atteint en deux étapes : la première consiste en la génération d'un vecteur vitesse variant de façon aléatoire autour de conditions nominales et la seconde consiste en la traduction des vitesses aérodynamiques perçues par le quadricoptère en forces et moments perturbateurs.

### 3.2.1 Génération du vent

Le modèle de vent de Dryden est utilisé pour générer une représentation réaliste de la vitesse du vent. Le comportement du vent est caractérisé par une variation aléatoire de la vitesse autour d'une vitesse nominale. Il s'agit donc de déterminer la composante aléatoire  $\mathbf{v}_{w,rand}^i$  associée à une vitesse nominale du vent  $\mathbf{v}_{w,nom}^i$  de façon à former le vecteur vent  $\mathbf{v}_w$  exprimé dans  $\mathcal{F}_i$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_w^i &= \mathbf{v}_{w,nom}^i + \mathbf{v}_{w,rand}^i \\ &= \begin{bmatrix} u_w & v_w & w_w \end{bmatrix}_{w,nom}^\top + \begin{bmatrix} u_w & v_w & w_w \end{bmatrix}_{w,rand}^\top \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ce modèle est principalement constitué d'un filtre ayant pour entrée un bruit blanc gaussien

(*White Gaussian Noise* (WGN)) de façon à générer un bruit coloré pour les trois composantes de  $\mathbf{v}_w$  (Tran, 2015). On utilise finalement la matrice d'Euler telle que définie par (3.1) afin d'exprimer le vecteur  $\mathbf{v}_w$  dans  $\mathcal{F}_b$  :

$$\mathbf{v}_w^b = \mathbf{E} \mathbf{v}_w^i$$

### 3.2.2 Forces et moments aérodynamiques

On cherche ici à quantifier les forces  $\mathbf{F}_a^b$  et les moments  $\mathbf{M}_a^b$  ressentis par le drone soumis à un vent  $\mathbf{v}_w^b$ . La méthode présentée dans cette section permet d'obtenir les forces et les moments induits par l'écoulement d'air agissant sur les hélices. Ces forces sont fonction de la vitesse aérodynamique  $\mathbf{v}_a^b$  du drone et de la vitesse de rotation des hélices  $\omega_j$ . La vitesse aérodynamique ainsi obtenue représente la vitesse de l'écoulement perçu par le drone.

Afin de pouvoir appliquer la méthode pour chacune des hélices, on utilise la vitesse aérodynamique projetée dans le repère hélice  $\mathcal{F}_{p,j} = \{O_{p,j}, \mathbf{x}_{p,j}, \mathbf{y}_{p,j}, \mathbf{z}_{p,j}\}$  (Fig. 3.1) :

$$\mathbf{v}_a^p = \mathbf{T}_{p/b} \mathbf{v}_a^b \quad (3.8)$$

avec

$$\mathbf{T}_{p/b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et  $\mathbf{v}_a^p = \begin{bmatrix} u_a^p & v_a^p & w_a^p \end{bmatrix}^\top$ .

### Interaction vent/hélice

La méthode utilisée pour calculer les forces et les moments additionnels issus de l'interaction entre un vent oblique et les hélices en rotation est basée sur la BEMT. Pour plus de détails, on peut se référer à (Khan and Nahon, 2015). La résolution peut par contre s'avérer longue et lourde mathématiquement. Des tables de références sont donc générées *a priori* pour des vitesses du vent et de rotation des hélices données. En procédant ainsi, on diminue le temps de simulation. En effet, pour une vitesse du vent et une vitesse de rotation des hélices, il ne suffit alors que d'interpoler dans les tables pour trouver les forces et les moments résultants. Il est important de noter qu'on considère ici une rotation antihoraire des hélices (positive selon  $\mathbf{x}_{p,j}$ ), les forces et les moments dans le cas d'une rotation horaire peuvent être obtenus à partir des mêmes résultats.

La géométrie des hélices n'est pas constante et varie radialement. Cette variation de géométrie

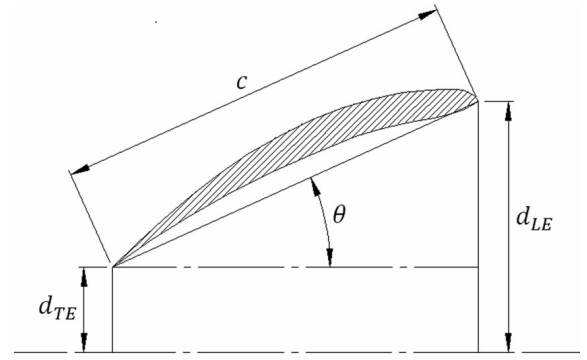
a une influence concrète sur la force et le moment résultant ; il est donc nécessaire d'en tenir compte. Pour se faire, on discrétise les paramètres de cette géométrie en fonction de la distance radiale ( $r$ ) par rapport à  $O_{p,j}$  faute d'en avoir l'expression analytique. On reprend donc la technique utilisée par Khan and Nahon (2013) pour le même modèle d'hélice, *Electrify Powerflow* 10×4.5, ce qui permet d'obtenir les paramètres discrétisés suivants :

$$\begin{aligned}
 r &= \{5, 20, 40, 60, 80, 100, 127\} \text{ (mm)} \\
 c &= \{12.37, 16.23, 22.85, 28.22, 28.90, 26.31, 13.07\} \text{ (mm)} \\
 \vartheta &= \{25, 26.5, 21.89, 14.39, 9.8, 4.75, 6.59\} \text{ (}^\circ\text{)} \\
 \alpha_0 &= \{0, 0, 9.66, 8.7, 7.4, 10.7, 8.4\} \text{ (}^\circ\text{)} \\
 N &= 2
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

avec la distance radiale  $r$ , la corde  $c$ , l'angle de tangage  $\vartheta$ , l'angle d'attaque de portance nulle  $\alpha_0$  et le nombre de pales de l'hélice  $N$ . La méthode de mesure de la géométrie est illustrée à la figure 3.2.



(a) Coupes de l'hélice (gauche) vue de coupe (droite)



(b) Mesure de la ligne de corde ( $c$ ) et de l'angle de tangage ( $\theta$  dans l'image ou  $\vartheta$  dans ce mémoire) selon les distances de référence du bord d'attaque ( $d_{LE}$ ) et du bord de fuite ( $d_{TE}$ ).

Figure 3.2 Méthode de mesure de la géométrie des hélices (Khan and Nahon, 2013).

En supposant que le profil des pales n'a pas d'effet considérable sur les forces et les moments aérodynamiques, on utilise la théorie des plaques planes et les simplifications qui en découlent. Ainsi, la pente du coefficient aérodynamique de portance selon l'angle d'attaque  $\alpha$  et le coefficient de traînée sont constants et valent :  $C_{l_\alpha} = 2\pi$  et  $C_{D_0} = 0.02$ .

La méthode est utilisée pour générer des tables de référence des forces et des moments résultants pour différentes vitesses de vent  $\mathbf{v}_a^p$  et différentes vitesses de rotation des moteurs

$\omega_j$  dans les intervalles suivants :

$$\omega_j = [0, 8600] \text{ (RPM)}$$

$$v_x = -u_a^p = [-12, 12] \text{ (m/s)}$$

$$v_{yz} = \left\| \begin{bmatrix} v_a^p & w_a^p \end{bmatrix} \right\|_2 = [0, 20] \text{ (m/s)}$$

Comme on peut le voir, seulement deux composantes de la vitesse aérodynamique sont utilisées, soit la vitesse perpendiculaire au plan de l'hélice ( $v_x$ ) et la vitesse dans le plan de l'hélice ( $v_{yz}$ ). Ces vitesses sont représentées en noir dans la figure 3.3.

À des fins de simplicité, on définit un nouveau repère  $\mathcal{F}_{a'} = \{O_{a'}, \mathbf{x}_{a'}, \mathbf{y}_{a'}, \mathbf{z}_{a'}\}$  où  $O_{a'}$  coïncide avec  $O_p$ , l'axe  $\mathbf{x}_{a'}$  coïncide avec l'axe  $\mathbf{x}_p$ , l'axe  $\mathbf{y}_{a'}$  est orienté dans la direction de la composante  $v_{yz}$  de l'écoulement et l'axe  $\mathbf{z}_{a'}$  complète la base directe tel que présenté à la figure 3.3.

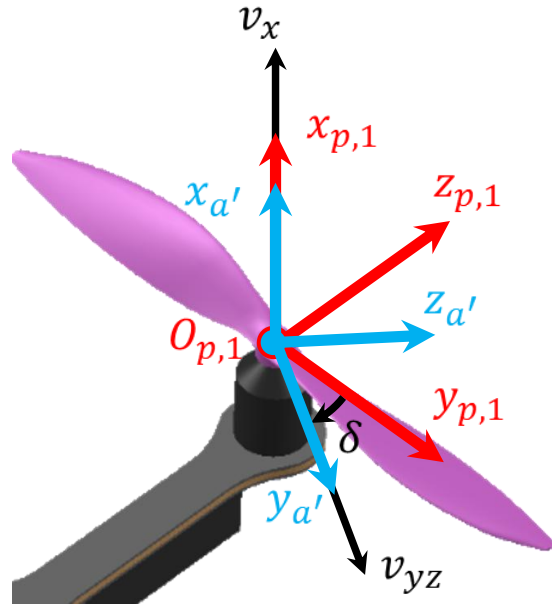


Figure 3.3 Définition du repère  $\mathcal{F}_{a'}$

La vitesse 2D résultante de l'écoulement perçu par l'hélice est donnée par :

$$\mathbf{v}_r = \begin{bmatrix} (v_x + v_{ia}) & (\omega_j r + v_{yz,\perp}) \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^2$$

où  $v_{ia}$  représente la vitesse axiale induite et  $v_{yz,\perp}$  correspond à la composante de l'écoulement

perpendiculaire à la pale de l'hélice. L'amplitude de  $\mathbf{v}_r$  est donnée par :

$$v_r = \|\mathbf{v}_r\|_2$$

et son angle par rapport au plan de l'hélice par :

$$\varphi = \arctan \left( \frac{v_x + v_{ia}}{\omega_j r + v_{yz,\perp}} \right)$$

où  $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . La vitesse  $v_{yz,\perp}$  est fonction de l'angle  $\Psi$  que fait la pale de l'hélice en rotation avec l'écoulement :

$$v_{yz,\perp} = v_{yz} \sin \Psi.$$

La vitesse axiale induite est définie par :

$$v_{ia} = v_{ia,0} \left( 1 + \frac{15\pi}{32} \tan \left( \frac{\chi}{2} \right) \frac{r}{R_p} \cos \Psi \right)$$

avec

$$\chi = \arctan \left( \frac{v_{yz}}{v_x + v_{ia,0}} \right)$$

où  $R_p$  est la distance extrême de la pale par rapport au centre de l'hélice alors que la vitesse axiale induite à la base de l'hélice  $v_{ia,0}$  reste indéterminée pour le moment. On définit également l'angle d'attaque efficace  $\alpha_{eff}$  qui correspond à l'angle de l'écoulement perçu par l'hélice :

$$\alpha_{eff} = \vartheta - \alpha_0 - \varphi$$

En supposant un effet négligeable du profil de l'hélice, on peut alors utiliser la théorie des plaques planes pour définir l'expression des coefficients aérodynamiques en fonctions de  $\alpha_{eff}$  (Hoerner and Borst, 1975; Lindenburg, 2000). Ainsi, pour un angle d'attaque efficace entre  $-10^\circ$  et  $13^\circ$  les coefficients aérodynamiques de portance  $C_l$ , traînée  $C_d$  et moment  $C_m$  sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} C_l &= C_{l\alpha} \alpha_{eff} \\ C_d &= C_n \sin(\alpha_{eff}) + C_t \cos(\alpha_{eff}) \\ C_m &= -C_n \left[ 0.25 - 0.175 \left( 1 - \frac{2\alpha_{eff}}{\pi} \right) \right] \end{aligned} \tag{3.10}$$

où les coefficients normal  $C_n$  et tangentiel  $C_t$  sont :

$$C_n = \frac{C_l + C_t \sin(\alpha_{eff})}{\cos(\alpha_{eff})}$$

$$C_t = C_{d,0} \cos(\alpha_{eff})$$

Aux limites de l'intervalle  $[-10, 13]^\circ$ , on considère que l'écoulement commence à décrocher. Entre  $20^\circ$  et  $160^\circ$ , on considère que l'écoulement a complètement décroché. Dans ce dernier intervalle, les coefficients aérodynamiques sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} C_l &= C_n \cos(\alpha_{eff}) - C_t \sin(\alpha_{eff}) \\ C_d &= C_n \sin(\alpha_{eff}) + C_t \cos(\alpha_{eff}) \\ C_m &= -C_n \left[ 0.25 - 0.175 \left( 1 - \frac{2\alpha_{eff}}{\pi} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

où les coefficients normal  $C_n$  et tangentiel  $C_t$  sont :

$$\begin{aligned} C_t &= 0.5 C_{d,0} \cos(\alpha_{eff}) \\ C_n &= C_{d,90} \frac{\sin(\alpha_{eff})}{0.56 + 0.44 \sin(\alpha_{eff})} \end{aligned}$$

Remarque : Entre les deux plages, l'écoulement est partiellement décroché et les valeurs des coefficients  $C_l$ ,  $C_d$  et  $C_m$  sont obtenues en interpolant les réponses données par (3.10) et (3.11) en fonction de l'angle  $\alpha_{eff}$ .

Selon la théorie de Froude (*momentum theory*), la poussée générée par l'hélice en fonction de l'écoulement est donnée par :

$$T = \int_{R_k}^{R_p} \int_0^{2\pi} 2 \rho r v_{ia} \sqrt{(v_x + v_{ia})^2 + v_{yz}^2} d\Psi dr \quad (3.12)$$

où  $R_k$  représente la distance radiale à la jonction entre la pale et la base.

Selon la *blade element theory*, cette même poussée est donnée par :

$$T = \int_{R_k}^{R_p} \int_0^{2\pi} \frac{N}{4\pi} \rho c v_r^2 (C_l \cos \varphi - C_d \sin \varphi) d\Psi dr \quad (3.13)$$

On rappelle que  $c$ ,  $\vartheta$  et  $\alpha_0$  sont fonction de  $r$ , la variable d'intégration de (3.12) et (3.13). Les équations sont donc résolues numériquement pour  $r$  tel que défini dans (3.9) et  $\Psi = \{0 :$



$\frac{\pi}{6} : 2\pi\}$ . Les équations deviennent :

$$T = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^{12} 2\rho \bar{r}_i v_{ia}(\bar{r}_i, \bar{\Psi}_j) \sqrt{(v_x + v_{ia}(\bar{r}_i, \bar{\Psi}_j))^2 + v_{yz}(\bar{\Psi}_j)^2} \Delta\Psi_j \Delta r_i \quad (3.14)$$

$$T = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^{12} \frac{N}{4\pi} \rho \bar{c}_i v_r^2(\bar{r}_i, \bar{\Psi}_j) \left( C_l \cos \varphi(\bar{r}_i, \bar{\Psi}_j) - C_d \sin \varphi(\bar{r}_i, \bar{\Psi}_j) \right) \Delta\Psi_j \Delta r_i \quad (3.15)$$

On définit les paramètres d'intégration en fonction de  $r$  selon  $i$  comme suit :

$$\Delta r_i = r_{i+1} - r_i \quad , \quad \begin{aligned} \bar{r}_i &= \frac{r_{i+1} + r_i}{2} \\ \bar{c}_i &= \frac{c_{i+1} + c_i}{2} \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} \bar{\alpha}_{0,i} &= \frac{\alpha_{0,i+1} + \alpha_{0,i}}{2} \\ \bar{\theta}_i &= \frac{\theta_{i+1} + \theta_i}{2} \end{aligned}$$

et la variable d'intégration  $\Psi$  selon  $j$  comme suit :

$$\Delta\Psi_j = \Psi_{j+1} - \Psi_j \quad , \quad \bar{\Psi}_j = \frac{\Psi_{j+1} + \Psi_j}{2}$$

On désire maintenant trouver la valeur  $v_{ia,0}$  pour laquelle les équations (3.14) et (3.15) sont satisfaites. On itère alors sur la valeur de  $v_{ia,0}$  jusqu'à ce que l'on obtienne une valeur de  $\Delta T$  en-deçà d'un certain seuil de tolérance ( $tol$ ) :

$$\Delta T = |T_{momentum} - T_{blade}| \leq tol$$

Une fois la valeur de  $v_{ia}$  obtenue, il est possible d'évaluer les forces générées par l'hélice dans  $\mathcal{F}_{a'}$  :

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{x}_{a'}} &= \int_{R_k}^{R_p} \int_0^{2\pi} \frac{N}{4\pi} \rho c v_r^2 (C_l \cos \varphi - C_d \sin \varphi) d\Psi dr \\ F_{\mathbf{y}_{a'}} &= \int_{R_k}^{R_p} \int_0^{2\pi} \frac{N}{4\pi} \rho c v_r^2 (C_l \sin \varphi + C_d \cos \varphi) \sin \Psi d\Psi dr \\ F_{\mathbf{z}_{a'}} &= - \int_{R_k}^{R_p} \int_0^{2\pi} \frac{N}{4\pi} \rho c v_r^2 (C_l \sin \varphi + C_d \cos \varphi) \cos \Psi d\Psi dr \end{aligned}$$

et les moments générés par l'hélice dans  $\mathcal{F}_{a'}$  :

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{x}_{a'}} &= - \int_{R_k}^{R_p} \int_0^{2\pi} \frac{N}{4\pi} \rho c v_r^2 (C_l \sin \varphi + C_d \cos \varphi) d\Psi r dr \\ M_{\mathbf{y}_{a'}} &= \int_{R_k}^{R_p} \int_0^{2\pi} \frac{N}{4\pi} \rho c v_r^2 [(C_l \cos \varphi - C_d \sin \varphi) r \sin \Psi + C_m c \cos \Psi] d\Psi dr \\ M_{\mathbf{z}_{a'}} &= - \int_{R_k}^{R_p} \int_0^{2\pi} \frac{N}{4\pi} \rho c v_r^2 [(C_l \cos \varphi - C_d \sin \varphi) r \cos \Psi - C_m c \sin \Psi] d\Psi dr \end{aligned}$$

Dans le cas d'une rotation horaire de l'hélice, il est possible d'obtenir les forces et les moments par symétrie selon le plan  $\mathbf{x}_{a'} - \mathbf{y}_{a'}$ . Les forces générées sont alors :

$$\begin{bmatrix} F_{\mathbf{x}_{a'}} \\ F_{\mathbf{y}_{a'}} \\ F_{\mathbf{z}_{a'}} \end{bmatrix}_{\text{horaire}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{\mathbf{x}_{a'}} \\ F_{\mathbf{y}_{a'}} \\ F_{\mathbf{z}_{a'}} \end{bmatrix}_{\text{antihoraire}}$$

et les moments :

$$\begin{bmatrix} M_{\mathbf{x}_{a'}} \\ M_{\mathbf{y}_{a'}} \\ M_{\mathbf{z}_{a'}} \end{bmatrix}_{\text{horaire}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{\mathbf{x}_{a'}} \\ M_{\mathbf{y}_{a'}} \\ M_{\mathbf{z}_{a'}} \end{bmatrix}_{\text{antihoraire}}$$

Il reste à effectuer une rotation selon l'axe  $\mathbf{x}_{p,j}$  (ou  $\mathbf{x}_{a'}$ ) pour obtenir les forces dans  $\mathcal{F}_{p,j}$  :

$$\begin{bmatrix} F_{\mathbf{x}_{p,j}} \\ F_{\mathbf{y}_{p,j}} \\ F_{\mathbf{z}_{p,j}} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{p/a'} \begin{bmatrix} F_{\mathbf{x}_{a'}} \\ F_{\mathbf{y}_{a'}} \\ F_{\mathbf{z}_{a'}} \end{bmatrix}$$

et les moments dans  $\mathcal{F}_{p,j}$  :

$$\begin{bmatrix} M_{\mathbf{x}_{p,j}} \\ M_{\mathbf{y}_{p,j}} \\ M_{\mathbf{z}_{p,j}} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{p/a'} \begin{bmatrix} M_{\mathbf{x}_{a'}} \\ M_{\mathbf{y}_{a'}} \\ M_{\mathbf{z}_{a'}} \end{bmatrix}$$

où la matrice de rotation de  $\mathcal{F}_{a'}$  à  $\mathcal{F}_{p,j}$  est donnée par :

$$\mathbf{R}_{p/a'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\delta & -s_\delta \\ 0 & s_\delta & c_\delta \end{bmatrix}$$

L'angle  $\delta$  est tel que défini à la figure 3.3 et est donné par :

$$\delta = \arctan \frac{w_a^p}{v_a^p}$$

### Forces et moments efficaces

Dans la Section 3.2.2, on a établi la méthode permettant de trouver les forces  $\mathbf{F}_{prop}^{p,j}$  et les moments  $\mathbf{M}_{prop}^{p,j}$  pour une hélice selon un vent incident que l'on considère être le vent perçu par le quadricoptère. En réalité, ce ne sont pas toutes les hélices qui perçoivent le même écoulement, et ce, en raison de la présence du corps du quadricoptère qui vient altérer l'écoulement. Pour tenir compte de la présence du corps, on définit un vecteur d'ajustement qui pondère l'influence des forces et des moments pour chaque hélice selon l'orientation du vent. Les coefficients d'ajustement  $c_j$  sont ainsi fonction de la direction  $\delta$  du vent dans le plan  $\mathbf{x}_b - \mathbf{y}_b$ . Ces coefficients peuvent être interpolés par rapport aux cas limites d'angles :

$$\delta = \left\{ -\pi, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi \right\} \text{ (rad)}$$

Les coefficients limites associés sont :

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2} \{2, 2, 1, 0, 0, 0, 1, 2, 2\} \quad , \quad c_2 = \frac{1}{2} \{1, 2, 2, 2, 1, 0, 0, 0, 1\} \\ c_3 &= \frac{1}{2} \{0, 0, 1, 2, 2, 2, 1, 0, 0\} \quad , \quad c_4 = \frac{1}{2} \{1, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 1\} \end{aligned}$$

À partir des forces  $\mathbf{F}_{prop}^{p,j}$  et des moments  $\mathbf{M}_{prop}^{p,j}$  dans  $\mathcal{F}_{p,j}$  évalués précédemment, il est possible, en utilisant les coefficients d'ajustement  $c_j$ , d'obtenir les forces et moments efficaces agissant sur chaque hélice :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{prop,eff}^{p,j} &= c_j \mathbf{F}_{prop}^{p,j} \\ \mathbf{M}_{prop,eff}^{p,j} &= c_j \mathbf{M}_{prop}^{p,j} \end{aligned}$$

Une transformation est alors requise pour obtenir les forces et les moments aérodynamiques résultants,  $\mathbf{F}_{prop}^b$  et  $\mathbf{M}_{prop}^b$ , dans  $\mathcal{F}_b$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{prop}^b &= \sum_{j=1}^4 \mathbf{T}_{p/b}^{-1} \mathbf{F}_{prop,eff}^{p,j} \\ \mathbf{M}_{prop}^b &= \sum_{j=1}^4 \left[ \mathbf{r}_i^b \times \mathbf{T}_{p/b}^{-1} \mathbf{F}_{prop,eff}^{p,j} + \mathbf{T}_{p/b}^{-1} \mathbf{M}_{prop,eff}^{p,j} \right] \end{aligned}$$

où  $\mathbf{r}_j^b$  est le vecteur position de  $O_{p,j}$  par rapport au CM du quadricoptère dans  $\mathcal{F}_b$ .

### 3.3 Équilibrage et linéarisation

Le modèle dynamique étant établi, il s'agit à présent d'équilibrer et de linéariser le quadricoptère autour de conditions de vol, et ce, afin de pouvoir synthétiser les lois de commande.

#### 3.3.1 Modèle d'état non linéaire complet

À l'aide des équations développées dans ce chapitre, il est possible d'exprimer la dynamique complète du quadricoptère couplée à celle des moteurs. On obtient alors l'équation d'état :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_w^b, \mathbf{w}) \quad (3.16)$$

où  $\mathbf{f}$  est obtenu à partir de (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) et (3.6). Le vecteur d'état  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{20}$  est donné par :

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_q^\top \quad \mathbf{x}_{m_1}^\top \quad \mathbf{x}_{m_2}^\top \quad \mathbf{x}_{m_3}^\top \quad \mathbf{x}_{m_4}^\top]^\top$$

avec  $\mathbf{x}_q$  le vecteur d'état du quadricoptère, et  $\mathbf{x}_{m_j}$  le vecteur d'état du moteur  $j$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_q &= [u \quad v \quad w \quad p \quad q \quad r \quad x \quad y \quad z \quad \phi \quad \theta \quad \psi]^\top \\ \mathbf{x}_{m_j} &= [i_j \quad \omega_j]^\top \end{aligned}$$

Le vecteur d'entrée  $\mathbf{u}_m$  rassemble les quatre tensions d'entrée des moteurs :

$$\mathbf{u}_m = [V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad V_4]^\top$$

La vitesse du vent  $\mathbf{v}_w^b$  agit aussi comme entrée, et les forces  $\mathbf{F}_{prop}^b$  et les moments  $\mathbf{M}_{prop}^b$  générés par l'écoulement d'air au niveau des hélices sont considérés comme des perturbations  $\mathbf{w}$  dans le modèle d'état. Ces perturbations prennent la forme suivante :

$$\mathbf{w} = \left[ (\mathbf{F}_{prop}^b)^\top \quad (\mathbf{M}_{prop}^b)^\top \right]^\top \quad (3.17)$$

Les deux sous-sections suivantes présentent indépendamment la linéarisation séparée des modèles d'état du quadricoptère et des moteurs qui forment par leur action couplée le modèle linéarisé complet.

### 3.3.2 Modèle d'état linéarisé du multicoptère

Le modèle d'état représentant seulement la dynamique du quadricoptère est :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_q = \mathbf{f}_q(\mathbf{x}_q, \mathbf{u}, \mathbf{v}_w^b, \mathbf{w}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_q) \end{cases} \quad (3.18)$$

où  $\mathbf{f}_q$  est obtenu à partir de (3.2), (3.3), (3.4) et (3.5), et les vecteurs d'entrée  $\mathbf{u}$  et de sortie  $\mathbf{y}$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3 \ \omega_4]^\top \\ \mathbf{y} &= [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ p \ q \ r \ x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi]^\top \end{aligned}$$

Remarque : On définit dans cette section le vecteur de sortie  $\mathbf{y}$  qui sera utilisé dans les prochains chapitres lors de la synthèse des lois de commande. Puisqu'on désire commander le drone en position dans le repère inertiel, ce sont donc les vitesses inertielles  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  et  $\dot{z}$  que l'on va utiliser dans le retour de sortie plutôt que  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

Les valeurs d'équilibre  $\mathbf{x}_{q,e}$ ,  $\mathbf{u}_e$  et  $\mathbf{v}_{w,e}^b$  sont données par la résolution du système suivant :

$$\dot{\mathbf{x}}_{q,e} = \mathbf{f}_q(\mathbf{x}_{q,e}, \mathbf{u}_e, \mathbf{v}_{w,e}^b, \mathbf{w}_e) = \mathbf{0} \quad (3.19)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{cm/i,e}^b &= [u_e \ v_e \ w_e]^\top \\ \boldsymbol{\omega}_{b/i,e}^b &= [p_e \ q_e \ r_e]^\top = [0 \ 0 \ 0]^\top \\ \mathbf{p}_{cm/i,e}^i &= [x_e \ y_e \ z_e]^\top = [0 \ 0 \ 0]^\top \\ \boldsymbol{\Phi}_e &= [\phi_e(\mathbf{v}_{a,e}^b) \ \theta_e(\mathbf{v}_{a,e}^b) \ \psi_e]^\top \\ \mathbf{u}_e &= [\omega_{1,e} \ \omega_{2,e} \ \omega_{3,e} \ \omega_{4,e}]^\top \\ \mathbf{v}_{w,e}^b &= \mathbf{0} \\ \mathbf{w}_e &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

On considère la force  $\mathbf{F}_{prop}^b$  et le moment  $\mathbf{M}_{prop}^b$  nuls pour la linéarisation, *i.e.*,  $\mathbf{w}_e = \mathbf{0}$ . À l'équilibre, les accélérations linéaires et angulaires sont nulles. L'équation de force (3.4) et l'équation de moment (3.5) donnent alors :

$$\begin{cases} \mathbf{0} = \mathbf{F}_g^b + \mathbf{F}_t^b + \mathbf{F}_a^b \\ \mathbf{0} = \mathbf{M}_t^b + \mathbf{M}_q^b + \mathbf{M}_j^b + \mathbf{M}_g^b + \mathbf{M}_a^b \end{cases}$$

En résolvant l'équation de moments à l'équilibre on obtient le système d'équations suivants :

$$\begin{cases} 0 = k_t(\omega_4^2 - \omega_2^2)l \\ 0 = k_t(\omega_1^2 - \omega_3^2)l \\ 0 = k_q(-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2) \end{cases}$$

On trouve ainsi que la vitesse de chaque moteur doit être égale pour un quadricoptère :

$$\omega_e = \omega_{i,e} \quad (3.20)$$

et le système d'équations peut être réécrit comme :

$$\begin{cases} 0 = s_{\theta_e} m g_0 + k_a u_{a,e} V_{a,e} \\ 0 = -s_{\phi_e} c_{\theta_e} m g_0 + k_a v_{a,e} V_{a,e} \\ 0 = -c_{\phi_e} c_{\theta_e} m g_0 + k_a w_{a,e} V_{a,e} - 4k_t \omega_e^2 \end{cases}$$

Il existe une infinité de solutions au problème précédent. En posant trois contraintes supplémentaires (*i.e.*, qu'on impose  $u_{a,e}$ ,  $v_{a,e}$  et  $w_{a,e}$ ) le système comporte une solution unique. La résolution permet finalement d'obtenir l'attitude du quadricoptère à l'équilibre pour une vitesse aérodynamique  $\mathbf{v}_{a,e}$  donnée :

$$\theta_e = -\arcsin\left(\frac{k_a u_{a,e} V_{a,e}}{m g_0}\right) \quad (3.21)$$

$$\phi_e = \arcsin\left(\frac{k_a v_{a,e} V_{a,e}}{\sqrt{m^2 g_0^2 - (k_a u_{a,e} V_{a,e})^2}}\right) \quad (3.22)$$

et la commande  $\omega_e$  à l'équilibre est :

$$\omega_e = \sqrt{g_0 \frac{\sqrt{m^2 g_0^2 - (k_a V_{a,e})^2 (u_{a,e}^2 + v_{a,e}^2)} + k_a w_{a,e} V_{a,e}}{4 k_t}} \quad (3.23)$$

Il est aussi important de mentionner que le choix des positions d'équilibre  $x_e$ ,  $y_e$ ,  $z_e$  et  $\psi_e$  est totalement arbitraire, puisqu'elles n'ont aucune influence sur la dynamique du système étudié.

La linéarisation du système (3.18) autour de la position d'équilibre  $\{\mathbf{x}_{q,e}, \mathbf{u}_e, \mathbf{v}_{w,e}^b\}$  donne le

système LTI suivant :

$$\begin{cases} \Delta \dot{\mathbf{x}}_q = \mathbf{A}_q \Delta \mathbf{x}_q + \mathbf{B}_q \Delta \mathbf{u} + \mathbf{B}_w^* \Delta \mathbf{v}_w^b + \mathbf{B}_w \Delta \mathbf{w} \\ \Delta \mathbf{y} = \mathbf{C} \Delta \mathbf{x}_q \end{cases} \quad (3.24)$$

avec les définitions suivantes pour les variables d'état, d'entrée et de sortie :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}_q &= [\Delta u \quad \Delta v \quad \Delta w \quad \Delta p \quad \Delta q \quad \Delta r \quad \Delta x \quad \Delta y \quad \Delta z \quad \Delta \phi \quad \Delta \theta \quad \Delta \psi]^\top \\ \Delta \mathbf{u} &= [\Delta \omega_1 \quad \Delta \omega_2 \quad \Delta \omega_3 \quad \Delta \omega_4]^\top \\ \Delta \mathbf{v}_w^b &= [\Delta u_w \quad \Delta v_w \quad \Delta w_w]^\top \\ \Delta \mathbf{y} &= [\Delta \dot{x} \quad \Delta \dot{y} \quad \Delta \dot{z} \quad \Delta p \quad \Delta q \quad \Delta r \quad \Delta x \quad \Delta y \quad \Delta z \quad \Delta \phi \quad \Delta \theta \quad \Delta \psi]^\top \end{aligned}$$

et les définitions suivantes pour les matrices du modèle d'état :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_q(\mathbf{x}_{q,e}, \mathbf{v}_{w,e}^b) &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}_q}{\partial \mathbf{x}_q} \right|_{\mathbf{x}_{q,e}, \mathbf{u}_e} \in \mathbb{R}^{12 \times 12} \\ \mathbf{B}_q(\mathbf{u}_e) &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}_q}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}_e} \in \mathbb{R}^{12 \times 4} \\ \mathbf{B}_w^*(\mathbf{x}_{q,e}, \mathbf{v}_{w,e}^b) &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}_q}{\partial \mathbf{v}_w^b} \right|_{\mathbf{x}_{q,e}, \mathbf{v}_{w,e}^b} \in \mathbb{R}^{12 \times 3} \\ \mathbf{B}_w^* &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}_q}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^{12 \times 6} \\ \mathbf{C}(\mathbf{x}_{q,e}) &= \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}_q} \right|_{\mathbf{x}_{q,e}} \in \mathbb{R}^{12 \times 12} \end{aligned}$$

où les variables précédées par  $\Delta$  représentent la déviation de la variable par rapport à sa valeur à l'équilibre, *i.e.*,  $x = x_e + \Delta x$ . Les matrices  $\mathbf{A}_q$ ,  $\mathbf{B}_q$ ,  $\mathbf{B}_w^*$  et  $\mathbf{B}_w$  sont les matrices jacobienues de la fonction vectorielle  $\mathbf{f}_q$  et  $\mathbf{C}$  est la matrice jacobienne de  $\mathbf{h}$ . Ces matrices sont données par :

$$\mathbf{A}_q(\mathbf{x}_{q,e}, \mathbf{v}_{w,e}^b) = \begin{bmatrix} -\mathbf{L}(\mathbf{v}_{a,e}^b) & \begin{bmatrix} 0 & -w_e & v_e \\ w_e & 0 & -u_e \\ -v_e & u_e & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{0}_3 & g_0 \begin{bmatrix} 0 & c_{\theta_e} & 0 \\ -c_{\phi_e} c_{\theta_e} & s_{\phi_e} s_{\theta_e} & 0 \\ s_{\phi_e} c_{\theta_e} & c_{\phi_e} s_{\theta_e} & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{E}^\top(\Phi_e) & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{G}(\Phi_e, \mathbf{v}_{cm/i,e}^b) \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{H}(\phi_e, \theta_e) & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_q(\mathbf{u}_e) = \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{m} \left[ \frac{d\mathbf{F}_{t,1}^b}{d\omega_1} \quad \dots \quad \frac{d\mathbf{F}_{t,4}^b}{d\omega_4} \right] \\ \hline \mathbf{I}^{b-1} \left( \left[ \frac{d\mathbf{M}_{t,1}^b}{d\omega_1} \quad \dots \quad \frac{d\mathbf{M}_{t,4}^b}{d\omega_4} \right] + \left[ \frac{d\mathbf{M}_{q,1}^b}{d\omega_1} \quad \dots \quad \frac{d\mathbf{M}_{q,4}^b}{d\omega_4} \right] \right) \\ \hline \mathbf{0}_{6 \times 4} \end{array} \right]$$

$$\mathbf{B}_w^*(\mathbf{x}_{q,e}, \mathbf{v}_{w,e}^b) = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{L}(\mathbf{v}_{a,e}^b) \\ \hline \mathbf{0}_{9 \times 3} \end{array} \right], \quad \mathbf{B}_w^* = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{1}{m} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \hline \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}^{b-1} \\ \hline \mathbf{0}_{6 \times 6} \end{array} \right]$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}_{q,e}) = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{E}^\top(\Phi_e) & \mathbf{0}_{3 \times 9} \\ \hline \mathbf{0}_{9 \times 3} & \mathbf{I}_9 \end{array} \right]$$

avec

$$\mathbf{L}(\mathbf{v}_{a,e}^b) = \frac{k_a}{m} \left( \frac{1}{V_{a,e}} \mathbf{v}_a^b (\mathbf{v}_a^b)^\top + V_{a,e} \mathbf{I}_3 \right)$$

$$\mathbf{G}(\Phi_e, \mathbf{v}_{cm/i,e}^b) = \frac{d\mathbf{E}^\top \mathbf{v}_{cm/i}^b}{d\Phi_e} \Big|_{(\Phi_e, \mathbf{v}_{cm/i,e}^b)} =$$

$$\left[ \begin{array}{ccc} (c_{\phi_e} s_{\theta_e} c_{\psi_e} + s_{\phi_e} s_{\psi_e}) v_e + (-s_{\phi_e} s_{\theta_e} c_{\psi_e} + c_{\phi_e} s_{\psi_e}) w_e & & \\ (c_{\phi_e} s_{\theta_e} s_{\psi_e} - s_{\phi_e} c_{\psi_e}) v_e - (s_{\phi_e} s_{\theta_e} s_{\psi_e} + c_{\phi_e} c_{\psi_e}) w_e & \dots & \\ c_{\phi_e} c_{\theta_e} v_e - s_{\phi_e} c_{\theta_e} w_e & & \\ & & \\ -s_{\theta_e} c_{\psi_e} u_e + s_{\phi_e} c_{\theta_e} c_{\psi_e} v_e + c_{\phi_e} c_{\theta_e} c_{\psi_e} w_e & & \\ \dots & & \\ -s_{\theta_e} s_{\psi_e} u_e + s_{\phi_e} c_{\theta_e} s_{\psi_e} v_e + c_{\phi_e} c_{\theta_e} s_{\psi_e} w_e & \dots & \\ -c_{\theta_e} u_e - s_{\phi_e} s_{\theta_e} v_e - c_{\phi_e} s_{\theta_e} w_e & & \\ & & \\ -c_{\theta_e} s_{\psi_e} u_e - (s_{\phi_e} s_{\theta_e} s_{\psi_e} + c_{\phi_e} c_{\psi_e}) v_e + (-c_{\phi_e} s_{\theta_e} s_{\psi_e} + s_{\phi_e} c_{\psi_e}) w_e & & \\ \dots & & \\ c_{\theta_e} c_{\psi_e} u_e + (s_{\phi_e} s_{\theta_e} c_{\psi_e} - c_{\phi_e} s_{\psi_e}) v_e + (c_{\phi_e} s_{\theta_e} c_{\psi_e} + s_{\phi_e} s_{\psi_e}) w_e & & \\ & & 0 \end{array} \right]$$



$$\frac{d\mathbf{F}_{t,i}^b}{d\omega_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2k_t\omega_{i,e} \end{bmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{M}_{t,i}^b}{d\omega_i} = \mathbf{r}_i^b \times \frac{d\mathbf{F}_{t,i}^b}{d\omega_i}, \quad \frac{d\mathbf{M}_{q,i}^b}{d\omega_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2s_i k_q \omega_{i,e} \end{bmatrix}$$

À partir de (3.21) et (3.22), les fonctions trigonométriques peuvent s'exprimer directement selon la vitesse aérodynamique à l'équilibre :

$$\begin{aligned} s_{\phi_e} &= \frac{k_a v_{a,e} V_{a,e}}{\sqrt{m^2 g_0^2 - (k_a u_{a,e} V_{a,e})}} & s_{\theta_e} &= -\frac{k_a u_{a,e} V_{a,e}}{m g_0} \\ c_{\phi_e} &= \frac{\sqrt{m^2 g_0^2 - (k_a V_{a,e})^2 (u_{a,e}^2 + v_{a,e}^2)}}{\sqrt{m^2 g_0^2 - (k_a u_{a,e} V_{a,e})^2}} & c_{\theta_e} &= \frac{\sqrt{m^2 g_0^2 - (k_a u_{a,e} V_{a,e})^2}}{m g_0} \end{aligned} \quad (3.25)$$

### 3.3.3 Modèle d'état linéarisé du moteur

Le modèle d'état du moteur  $j$  est :

$$\dot{\mathbf{x}}_{m_j} = \mathbf{f}_{m_j}(\mathbf{x}_{m_j}, V_j)$$

avec  $\mathbf{x}_{m_j} = [i_j \ \omega_j]^\top$ ,  $\forall j \in \{1, 2, 3, 4\}$  et  $\mathbf{f}_{m_j}$  obtenu à partir de (3.6). La résolution de  $\mathbf{f}_{m_j}(\mathbf{x}_{m_j,e}, V_{j,e}) = \mathbf{0}$  permet d'obtenir les valeurs à l'équilibre suivantes :

$$\begin{cases} i_e = i_{j,e} = \frac{\omega_e}{k_m} (b_m + k_q \omega_e) \\ V_e = V_{j,e} = k_e \omega_e + R i_e \end{cases}, \quad \forall j$$

pour lesquelles la vitesse de rotation à l'équilibre  $\omega_e$  est donnée par (3.23). La représentation LTI d'un moteur  $j$  est donnée par :

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}_{m_j} = \mathbf{A}_{m_j}(\mathbf{x}_{m_j,e}) \Delta \mathbf{x}_{m_j} + \mathbf{B}_{m_j} \Delta V_j \quad (3.26)$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}_{m_j} &= [\Delta i_j \ \Delta \omega_j]^\top \\ \mathbf{A}_{m_j}(\mathbf{x}_{m_j,e}) &= \begin{bmatrix} -R/L & -k_e/L \\ k_m/J_m & -(b_m + 2k_q \omega_e)/J_m \end{bmatrix}, \quad \forall j \\ \mathbf{B}_{m_j} &= [1/L \ 0]^\top \end{aligned}$$

L'équation d'état LTI rassemblant les quatre moteurs est alors donnée par :

$$\begin{cases} \Delta \dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{A}_m(\mathbf{x}_{m,e}) \Delta \mathbf{x}_m + \mathbf{B}_m \Delta \mathbf{u}_m \\ \Delta \mathbf{u}_m = \mathbf{C}_m \mathbf{x}_m \end{cases} \quad (3.27)$$

où les vecteurs d'état  $\Delta \mathbf{x}_m$  et d'entrée  $\Delta \mathbf{u}_m$  sont définis par :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}_m &= [\Delta \mathbf{i}^\top \quad \Delta \boldsymbol{\omega}^\top]^\top \\ \Delta \mathbf{i} &= [\Delta i_1 \quad \Delta i_2 \quad \Delta i_3 \quad \Delta i_4]^\top \\ \Delta \boldsymbol{\omega} &= [\Delta \omega_1 \quad \Delta \omega_2 \quad \Delta \omega_3 \quad \Delta \omega_4]^\top \\ \Delta \mathbf{u}_m &= [\Delta V_1 \quad \Delta V_2 \quad \Delta V_3 \quad \Delta V_4]^\top \end{aligned}$$

et où les matrices sont obtenues en utilisant le produit de Kronecker  $\otimes$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_m(\mathbf{x}_{m,e}) &= \mathbf{A}_{m_j} \otimes \mathbf{I}_4 \\ \mathbf{B}_m &= \mathbf{B}_{m_j} \otimes \mathbf{I}_4 \end{aligned}$$

### 3.3.4 Modèle d'état linéarisé complet

À partir des modèles d'état du quadricoptère (3.24) et des moteurs (3.27), le modèle d'état linéarisé complet est donné par :

$$\begin{cases} \Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_m + \mathbf{B}_w \Delta \mathbf{v}_w^b + \mathbf{B}_w \Delta \mathbf{w} \\ \Delta \mathbf{y} = \mathbf{C} \Delta \mathbf{x} \end{cases} \quad (3.28)$$

où  $\Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_q^\top & \Delta \mathbf{x}_m^\top \end{bmatrix}^\top$  et  $\Delta \mathbf{u}_m = \begin{bmatrix} \Delta V_1 & \Delta V_2 & \Delta V_3 & \Delta V_4 \end{bmatrix}^\top$ . Les matrices sont données par :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_q & \mathbf{B}_q \mathbf{C}_m + \mathbf{B}_m^* \\ \mathbf{0}_{8 \times 12} & \mathbf{A}_m \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{12 \times 4} \\ \mathbf{B}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_w^* \\ \mathbf{0}_{8 \times 3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_w^* \\ \mathbf{0}_{8 \times 6} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_m^* &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 8} \\ \mathbf{I}^{b-1} \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{M}_{j,1}^b}{di_1} & \dots & \frac{d\mathbf{M}_{j,4}^b}{di_4} & \frac{d\mathbf{M}_{j,1}^b}{d\omega_1} & \dots & \frac{d\mathbf{M}_{j,4}^b}{d\omega_4} \end{bmatrix} \\ \mathbf{0}_{6 \times 8} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_m &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_4 & \mathbf{I}_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec

$$\frac{d\mathbf{M}_{j,i}^b}{di_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -s_i k_m \end{bmatrix}^\top \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{M}_{j,i}^b}{d\omega_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & s_i (b_m + 2 k_q \omega_e) \end{bmatrix}^\top$$

Ici,  $\mathbf{B}_m^*$  représente l'effet du moment d'inertie des hélices  $\mathbf{M}_j^b$  sur la dynamique complète du système. En effet, en utilisant (3.6) il est possible d'exprimer l'accélération angulaire des hélices  $\dot{\omega}_j$  comme une fonction de l'état des moteurs  $\mathbf{x}_{m,j}$ .

## CHAPITRE 4 COMPARAISON DES TECHNIQUES DE SYNTHÈSE LQR ET $\mathcal{H}_\infty$ EN MAINTIEN DE POSITION DANS UN ENVIRONNEMENT VENTEUX

Dans ce chapitre on attaque le problème du maintien de position du quadricoptère lorsque soumis à des perturbations externes. Les résultats obtenus ont été présentés à l'*International Conference on Unmanned Aircraft Systems* (ICUAS) qui s'est tenu en juin 2018 à Dallas au Texas (Massé et al., 2018).

On souhaite commander le quadricoptère en position  $x$ ,  $y$  et  $z$  et en direction  $\psi$ . Pour ce faire, on utilise d'une part, la technique de commande optimale classique LQR, puis d'autre part, la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée. On y présente séquentiellement la méthode utilisée et la loi de commande obtenue pour chacune des synthèses, puis on termine en fournissant une analyse comparative en simulation. Les valeurs numériques du quadricoptère et des moteurs sont présentées respectivement dans les tableaux 4.1 et 4.2.

Tableau 4.1 Paramètres dynamiques du quadricoptère

Paramètres	Description	Valeur	Unité
$m$	masse	1.7	kg
$I_{xx} = I_{yy}$	moment d'inertie	0.0364	kg.m <sup>2</sup>
$I_{zz}$	moment d'inertie	0.0486	kg.m <sup>2</sup>
$l$	longueur du bras	0.2	m
$k_t$	coefficient de poussée	$1.5e-5$	N.s <sup>2</sup> /rad <sup>2</sup>
$k_q$	coefficient de traînée	$2e-7$	N.m.s <sup>2</sup> /rad <sup>2</sup>
$g_0$	accélération gravitationnelle	9.80665	m/s <sup>2</sup>
$\rho_0$	masse volumique de l'air (NLM)	1.225	kg/m <sup>3</sup>
$h_p$	position verticale des hélices	0.05	m
$C_d A$	surface de traînée de corps	0.08	m <sup>2</sup>

### 4.1 Commande optimale LQR

L'architecture de commande utilisée pour la synthèse LQR correspond à un retour d'état avec action intégrale sur l'erreur de suivi des sorties  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $\psi$ . Celle-ci est inspirée de (Tran et al., 2015). La figure 4.1 illustre cette architecture ainsi que la nomenclature utilisée.

Il est à noter que seul le modèle d'état du quadricoptère (3.18) (*i.e.*, sans considérer la dyna-

Tableau 4.2 Motor Parameters

Paramètres	Description	Valeur	Unité
$J_m$	moment d'inertie	$1.25e-5$	kg.m <sup>2</sup>
$L$	inductance	$0.5e-3$	H
$R$	résistance	0.05	$\Omega$
$k_e$	counter EMF constant	$4.19e-3$	V.s/rad
$k_m$	constante de moment	$4.19e-3$	N.m/A
$b_m$	coefficient de friction visqueuse	0	N.m.s/rad

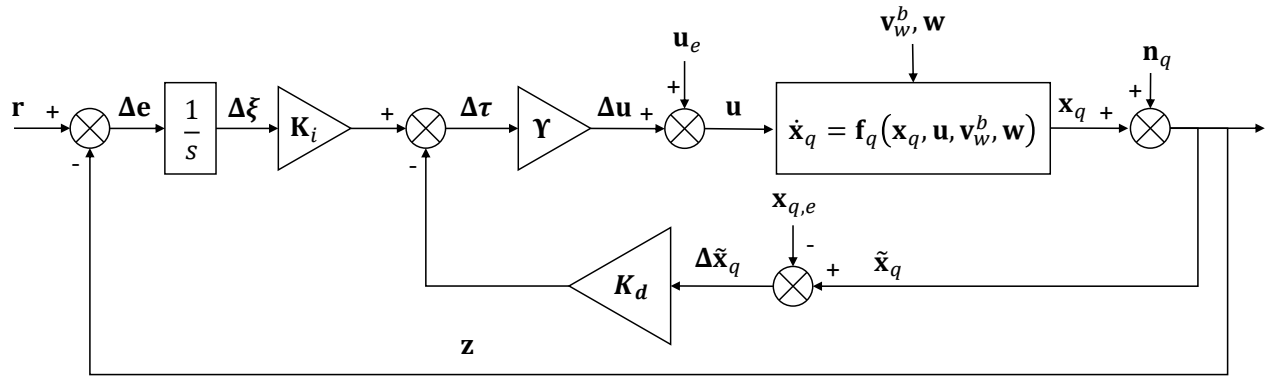


Figure 4.1 Architecture de commande utilisée pour la synthèse LQR

mique des moteurs (3.6)) est utilisé pour cette synthèse. En effet, les états de la dynamique des moteurs ne sont pas facilement mesurables, et ne peuvent donc être utilisés pour un retour d'état optimal.

On introduit de plus la matrice de transformation  $\Upsilon$  telle que  $\Delta \mathbf{u} = \Upsilon \Delta \boldsymbol{\tau}$  qui permet de relier le vecteur d'entrée  $\Delta \mathbf{u}$  des variations de vitesse des moteur  $\Delta \omega_j$  à un vecteur d'entrée  $\Delta \boldsymbol{\tau}$  des variations normalisées commandées de force en  $\mathbf{z}_b$  et des moments appliqués :

$$\Delta \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta F_z}{8 \omega_e k_t} & \frac{\Delta M_\phi}{4 \omega_e l k_t} & \frac{\Delta M_\theta}{4 \omega_e l k_t} & \frac{\Delta M_\psi}{8 \omega_e k_q} \end{bmatrix}^\top$$

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Cette transformation a l'avantage de découpler les entrées du système, et de simplifier par la suite la structure des matrices de gains.

Les vecteurs d'entrée  $\Delta \mathbf{r} \in \mathbb{R}^4$ , de sortie régulée  $\Delta \mathbf{z} \in \mathbb{R}^4$  et d'erreur de suivi  $\Delta \mathbf{e} \in \mathbb{R}^4$  sont définis comme suit :

$$\Delta \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \Delta x_d & \Delta y_d & \Delta z_d & \Delta \psi_d \end{bmatrix}^\top$$

$$\Delta \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \Delta x & \Delta y & \Delta z & \Delta \psi \end{bmatrix}^\top + \mathbf{n}_z$$

$$\Delta \mathbf{e} = \Delta \mathbf{r} - \Delta \mathbf{z}$$

avec  $\mathbf{n}_z$  le vecteur d'entrée du bruit de mesure sur  $\mathbf{z}$ .

L'objectif de la commande LQR consiste à calculer les matrices de gains  $\mathbf{K}_d$  et  $\mathbf{K}_i$  qui minimisent un critère quadratique donné. On travaille sur le modèle d'état linéarisé issu de (3.24) avec :

$$\begin{cases} \Delta \dot{\mathbf{x}}_q = \mathbf{A}_q \Delta \mathbf{x}_q + \mathbf{B}_q \Upsilon \Delta \boldsymbol{\tau} \\ \Delta \mathbf{y} = \mathbf{C} \Delta \mathbf{x}_q \end{cases} \quad (4.1)$$

À des fins de résolution, le modèle d'état est augmenté de la dynamique de l'erreur  $\Delta \mathbf{e} = \Delta \dot{\boldsymbol{\xi}}$  afin de garantir une erreur de suivi nulle en régime permanent. Les états associés à la dynamique de cette erreur et les états du quadricoptère forment alors le vecteur d'état augmenté  $\Delta \mathbf{x}_a$  :

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}_a = \mathbf{A}_a \Delta \mathbf{x}_a + \mathbf{B}_a \Delta \boldsymbol{\tau} \quad (4.2)$$

où  $\Delta \mathbf{x}_a = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_q^\top & \Delta \boldsymbol{\xi}^\top \end{bmatrix}^\top$  et les matrices sont données par :

$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_q & \mathbf{0}_{12 \times 4} \\ -\mathbf{C}_q & \mathbf{0}_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_q \boldsymbol{\Upsilon} \\ \mathbf{0}_4 \end{bmatrix}$$

avec  $\mathbf{C}_q$  la matrice telle que  $\Delta \mathbf{z} = \mathbf{C}_q \Delta \mathbf{y}$  :

$$\mathbf{C}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \hline \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Les matrices de gains  $\mathbf{K}_d$  et  $\mathbf{K}_i$  sont obtenues en minimisant le critère :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \Delta \mathbf{x}_a^\top \mathbf{Q}_a \Delta \mathbf{x}_a + \Delta \boldsymbol{\tau}^\top \mathbf{R}_a \Delta \boldsymbol{\tau} \, dt$$

avec la loi de commande suivante :

$$\Delta \boldsymbol{\tau} = -\mathbf{K}_d \Delta \mathbf{x}_q + \mathbf{K}_i \Delta \boldsymbol{\xi} = -\mathbf{K}_a \Delta \mathbf{x}_a, \quad \mathbf{K}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_d & -\mathbf{K}_i \end{bmatrix}$$

La solution au problème posé ici a été trouvée par Kalman et correspond à la solution de l'équation de Riccati suivante :

$$\mathbf{0} = \mathbf{K}_a \mathbf{A} + \mathbf{A}^\top \mathbf{K}_a - \mathbf{K}_a \mathbf{B} \mathbf{R}_a^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{K}_a + \mathbf{Q}_a$$

Les matrices de pondération  $\mathbf{Q}_a$  et  $\mathbf{R}_a$  utilisées sont :

$$\mathbf{Q}_a = \text{diag}([10^2, 10^2, 10^2, 1, 1, 1, 10^4, 10^4, 10^4, 1, 1, 1, 10^3, 10^3, 10^3, 10^3])$$

$$\mathbf{R}_a = 10^2 \cdot \text{diag}([1, 1, 1, 1])$$

Ces matrices pondèrent fortement la position  $\begin{bmatrix} \Delta x & \Delta y & \Delta z \end{bmatrix}^\top$  et l'intégrale de l'erreur de suivi des sorties régulées  $\Delta \boldsymbol{\xi} = \int \Delta \mathbf{e} \, dt$ . On rappelle que l'on désire une loi de commande performante en maintien de position. Le choix de ces matrices provient d'un processus itératif lors duquel différentes pondérations ont été testées. Ces pondérations-ci offraient les meilleurs résultats en maintien de position tout en conservant une bonne stabilité du contrôleur associé lorsqu'appliqué au système non linéaire.

La résolution du problème LQR est implantée dans MATLAB® sous la forme de la fonction

`lqr`. Avec  $\mathbf{A}_a$ ,  $\mathbf{B}_a$ ,  $\mathbf{Q}_a$  et  $\mathbf{R}_a$  comme argument de la fonction `lqr`, on obtient les matrices de gains suivantes :

$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3.16 & 0 \\ 0 & -3.16 & 0 & 0 \\ 3.16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.16 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 30.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15.3 & 0 & 31.0 & 0 & 0 & 0 & -14.0 & 0 & 88.4 & 0 & 0 \\ 15.3 & 0 & 0 & 0 & 31.0 & 0 & 14.0 & 0 & 0 & 0 & 88.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 43.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16.6 \end{bmatrix}$$

Les réponses temporelles du système linéarisé avec cette loi de commande sont montrées à la figure 4.2.

## 4.2 Commande robuste

À moins d'indications contraires, les notations utilisées pour la synthèse LQR et détaillées dans la section 4.1 sont aussi applicables pour la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée. L'architecture est, quant à elle, différente et la dynamique des moteurs n'est plus négligée. Ces changements peuvent facilement être pris en compte pour ce type de synthèse en raison de la flexibilité et de la simplicité d'utilisation de la fonction `sys tune` développée par Gahinet and Apkarian (2011) du *Robust Control Toolbox* de MATLAB. La nouvelle architecture de commande est définie dans la figure 4.3 et est motivée par le découplage naturel du mouvement d'un corps solide.

Toujours dans l'optique de découpler les entrées du système, on définit le vecteur d'entrée virtuelle de la force et des moments commandés  $\Delta \mathbf{u}_v$  tel que :

$$\Delta \mathbf{u}_m = \Upsilon \Delta \mathbf{u}_v$$

avec la matrice de transformation  $\Upsilon$  définie précédemment et  $\Delta \mathbf{u}_m$  le vecteur d'entrée des variations normalisées de tension des moteurs.

Cette nouvelle architecture mène à une définition légèrement différente des sorties. On a



The diagram illustrates a control system with the following components and signal flow:

- Reference Input:**  $r$  enters a summing junction with a positive sign.
- Feedback Input:**  $z$  enters the same summing junction with a negative sign.
- Error Signal:** The output of the summing junction is  $\Delta e$ .
- Feedforward Path:**  $\Delta e$  is split. One branch goes through a block  $\frac{1}{s}$  and then  $\Delta \xi$  to a gain block  $K_i$ . The other branch goes directly to a gain block  $K_p$ .
- Control Signal:** The outputs of  $K_p$  and  $K_i$  are summed (positive signs) to produce  $\Delta u_v^i$ .
- Disturbance Compensation:**  $\Delta u_v^i$  passes through a block  $R_{b/i}^+$  to produce  $\Delta u_v^b$ .
- Disturbance Input:**  $\Delta u_v^b$  enters a summing junction with a negative sign, along with a feedback signal from  $K_{d_2}$ .
- Plant Input:** The result of the summing junction is  $\Delta u_v$ , which enters a block  $\Upsilon$  to produce  $u_m$ .
- Disturbance Input:**  $u_{m,e}$  enters a summing junction with a positive sign along with  $u_m$ .
- Plant Dynamics:** The output of the summing junction is  $u_m$ , which enters a block representing the system dynamics:
 
$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u_m, v_w^b, w) \\ y &= h(x) \end{aligned}$$
- Disturbance Input:**  $v_w^b, w$  enters the system dynamics block.
- Output:** The output of the system dynamics block is  $y$ .
- Measurement Noise:**  $n$  enters a summing junction with a positive sign along with  $y$ .
- Measured Output:** The output of this summing junction is  $z$ , which is fed back to the initial summing junction.
- Feedback Path:**  $z$  is also fed back through two derivative blocks:  $K_{d_1}$  and  $K_{d_2}$ .
  - $K_{d_1}$  takes  $z$  and produces  $\Delta y_1$ , which is summed (positive sign) with  $y_1$  to produce  $y_{1,e}$ .
  - $K_{d_2}$  takes  $z$  and produces  $\Delta y_2$ , which is summed (positive sign) with  $y_2$  to produce  $y_{2,e}$ .
- Disturbance Inputs:**  $y_{1,e}$  and  $y_{2,e}$  are fed back to the summing junctions before the disturbance inputs  $\Delta u_v^b$  and  $\Delta u_v$  respectively.

Figure 4.3 Architecture de commande utilisée pour la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée

donc :

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_1 &= \begin{bmatrix} \dot{y} & \dot{x} & y & x \end{bmatrix}^\top + \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{y}_2 &= \begin{bmatrix} \dot{z} & p & q & r & z & \phi & \theta & \psi \end{bmatrix}^\top + \mathbf{n}_2\end{aligned}$$

avec  $\mathbf{n}_1^\top$  et  $\mathbf{n}_2^\top$  les vecteurs d'entrée du bruit de mesure sur  $\mathbf{y}_1$  et  $\mathbf{y}_2$ . De cela, découle la loi de commande suivante :

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{u}_v^i &= \mathbf{K}_p \Delta \mathbf{e} + \mathbf{K}_i \Delta \boldsymbol{\xi} - \mathbf{K}_{d1} \Delta \mathbf{y}_1 \\ \Delta \mathbf{u}_v^b &= \mathbf{R}_{b/i}^*(\Delta \psi) \Delta \mathbf{u}_v^i \\ \Delta \mathbf{u}_v &= \Delta \mathbf{u}_v^b - \mathbf{K}_{d2} \Delta \mathbf{y}_2\end{aligned}$$

Comme l'illustre la figure 4.3, on commande les états  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $\psi$  dans le repère inertiel alors que les actionneurs sont fixes par rapport repère objet et agissent dans ce dernier. Une transformation de la commande inertielle  $\mathbf{u}_v^i$  vers la commande dans  $\mathcal{F}_b$ ,  $\mathbf{u}_v^b$ , est donc nécessaire. En faisant l'hypothèse de petits angles  $\Delta \phi$  et  $\Delta \theta$ , cette transformation se résume en une rotation d'un angle  $\psi$  autour de l'axe  $\mathbf{z}_i$  (celui-ci est confondu à l'axe  $\mathbf{z}_b$  en raison de l'hypothèse que l'on vient de poser) pour les moments commandés selon les axes  $\mathbf{x}_b$  et  $\mathbf{y}_b$  :

$$\mathbf{R}_{b/i}^*(\Delta \psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\Delta \psi} & -s_{\Delta \psi} & 0 \\ 0 & s_{\Delta \psi} & c_{\Delta \psi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La fonction `sysune` permet de déterminer les gains dans le cadre de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée pour le modèle d'état linéarisé du système complet donné par (3.28) :

$$\begin{cases} \Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Upsilon \Delta \mathbf{u}_v + \mathbf{B}_w \Delta \mathbf{v}_w^b + \mathbf{B}_w \Delta \mathbf{w} \\ \Delta \mathbf{y} = \mathbf{C} \Delta \mathbf{x}_q \end{cases}$$

L'avantage de cette technique est de pouvoir attaquer le problème directement dans le domaine fréquentiel. Ainsi, il est possible d'imposer des contraintes *a priori* en utilisant la fonction `frd(gain,frequency)` de MATLAB et limiter le gain d'une fonction de transfert spécifique selon un gabarit fréquentiel choisi. Cela représente un avantage puisqu'on ne connaît pas précisément le comportement du vent, mais on en connaît le comportement fréquentiel. De cette façon, on peut imposer un gabarit fréquentiel de façon à limiter le gain à basse

fréquence entre l'entrée perturbatrice  $\mathbf{w}$  et la position du quadricoptère.

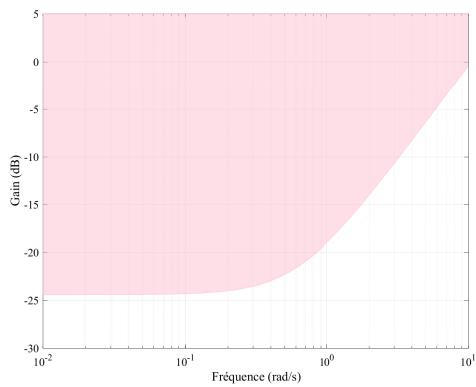
La région colorée dans le coin haut-gauche de la figure 4.4 représente un exemple de gabarit fréquentiel imposé de telle sorte à atténuer l'effet des perturbations dues au vent sur la position du drone à basse fréquence. La contrainte est parfaitement rencontrée quand les courbes en fréquence restent en dehors de cette région. Cela correspond à une valeur de  $\gamma$  (une mesure de satisfaction de la contrainte) inférieure ou égale à 1. Les contraintes fréquentielles et structurées suivantes sont posées de façon à obtenir de bonnes performances en boucle fermée et une loi de commande robuste :

- Rejet des perturbations dues au vent à basse fréquence par rapport à la position du drone et son orientation (Figs. 4.4a et 4.4b) : gabarit fréquentiel  $\mathbf{frd}([0.05 \ 0.05 \ 0.5], [0 \ 0.2 \ 20])$  entre  $\Delta \mathbf{w}$  et  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta z$  et  $\mathbf{frd}([0.1 \ 0.1 \ 10], [0 \ 0.1 \ 10])$  entre  $\Delta \mathbf{w}$  et  $\Delta \psi$  ;
- Restrictions sur les pôles en boucle fermée (Fig. 4.4c) : amortissement  $\geq 0.4$  et fréquence  $\in [0.2, 100]$  ;
- Bonnes marges de stabilité (Fig. 4.4d) : marge de gain de 4 dB et marge de phase de  $30^\circ$  au niveau de l'entrée  $\Delta \mathbf{u}_m$  ;
- Suivi de trajectoire (Fig. 4.4e) : moins de 2% de différence entre  $\Delta \mathbf{z}$  et le modèle de référence  $G(s) = \frac{1}{s+1}$  ;
- Découplage (Fig. 4.4e) : une entrée régulée  $\Delta \mathbf{r}(i)$  ne devrait affecter que la sortie régulée correspondante  $\Delta \mathbf{z}(i) \ \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

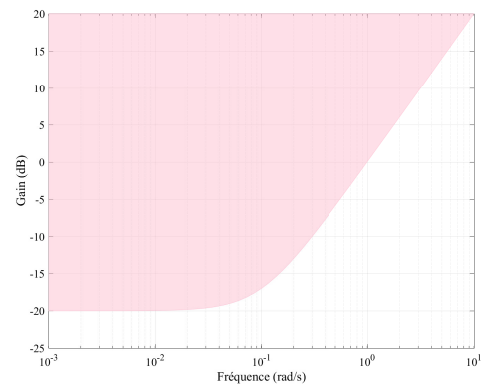
Pour faciliter d'une part, la convergence de l'algorithme **syntune** et, d'autre part, la stabilité au niveau de l'implantation sur le modèle non linéaire, les degrés de libertés des matrices de gains  $\mathbf{K}_i$ ,  $\mathbf{K}_p$ ,  $\mathbf{K}_{d_1}$  et  $\mathbf{K}_{d_2}$  ont été réduits de telle sorte à reproduire le découplage naturel de la commande  $\Delta \mathbf{u}_m$  par rapport à l'état  $\Delta \mathbf{x}$ . Les gains ainsi calculés avec **syntune** sont :

$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2.52 & 0 \\ 0 & -8.78 & 0 & 0 \\ 8.76 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7.16 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.161 & 0 \\ 0 & -0.123 & 0 & 0 \\ -0.110 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.366 \end{bmatrix}$$

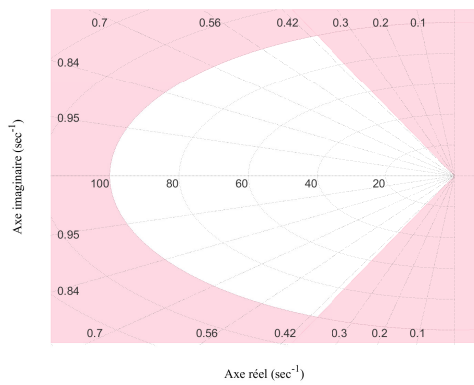
$$\mathbf{K}_{d_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8.50 & -14.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.49 & 14.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



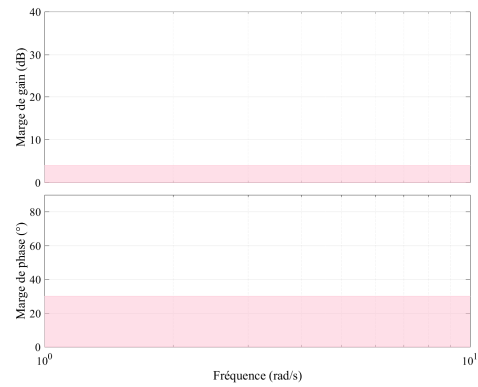
(a) Contrainte de rejet de perturbation sur  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta z$



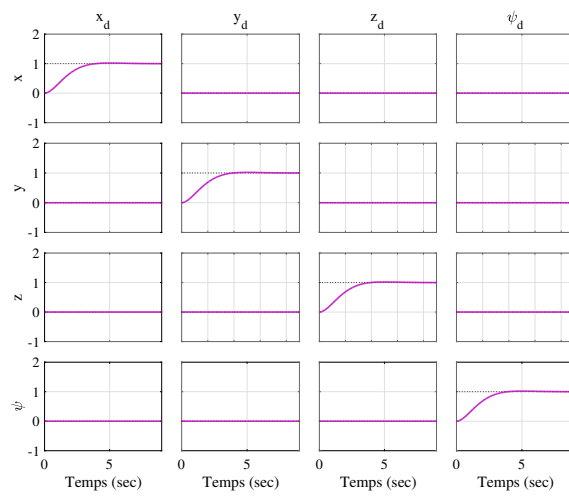
(b) Contrainte de rejet de perturbation sur  $\Delta\psi$



(c) Contrainte sur les pôles



(d) Marges de stabilité



(e) Contrainte en suivi

Figure 4.4 Gabarits imposés

$$\mathbf{K}_{d_2} = \begin{bmatrix} 2.78 & 3.94 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.01 & 9.75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 & 9.74 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.80 & 11.2 \end{bmatrix}$$

Le critère de satisfaction des contraintes  $\mathcal{H}_\infty$  structurée résultant est  $\gamma = 1.08$  avec MATLAB<sup>®</sup> R2016b. On peut alors considérer que les contraintes ne sont complètement satisfaites. Remarque : On considère qu'une contrainte  $\mathcal{H}_\infty$  structurée est entièrement respectée si le critère de satisfaction associé est tel que  $\gamma \leq 1$ .

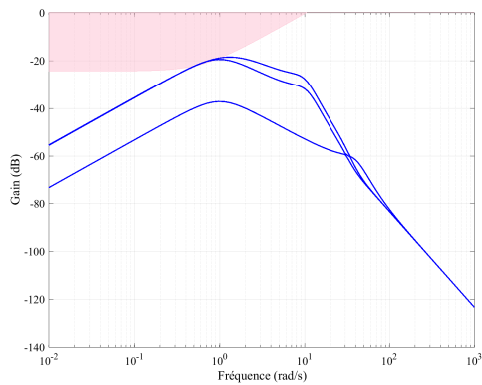
Les figures 4.5 et 4.6 montrent les résultats de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée obtenus pour les cinq contraintes imposées. On remarque que les contraintes ne sont pas entièrement rencontrées, mais qu'elles s'approchent du modèle désiré. En effet, on remarque que la valeur de  $\gamma$  est près de 1. Les figures 4.5a et 4.5b montrent que les gabarits fréquentiels pour le rejet des perturbations sont sensiblement respectés. La figure 4.5c montre que la restriction sur le positionnement des pôles en boucle fermée est aussi près de ce qui était recherché. La figure 4.5d révèle que la marge de phase n'est pas tout à fait rencontrée, mais demeure acceptable. Finalement, la figure 4.6 montre que le modèle de référence  $G(s)$  est étroitement suivi pour toutes les sorties régulées et que le découplage est respecté.

### 4.3 Simulations

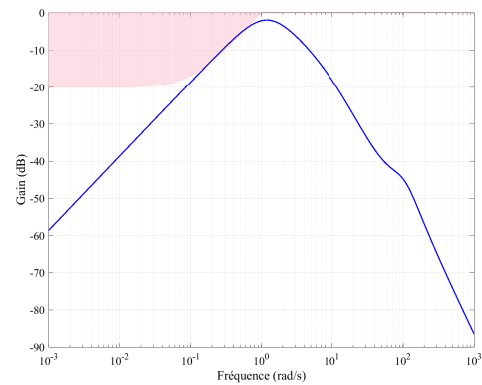
Dans cette section, on simule la réponse temporelle du système pour chacune des deux lois de commande précédemment synthétisées, et ce, à partir des modèles **Simulink** reproduisant l'architecture de commande des figures 4.1 et 4.3. L'objectif de ces simulations est de valider que le quadricoptère peut maintenir sa position ou suivre une trajectoire circulaire lorsqu'il est soumis à un vent constant de 7 m/s suivi d'une rafale de vent de 14 m/s orientés nord-ouest (*i.e.*, une entrée échelon  $\mathbf{v}_{w,nom}^i = 14/\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$  m/s).

Pour les simulations, on ajoute également au contrôleur des saturations sur l'attitude ( $\phi_d, \theta_d$ ) et la vitesse de rotation des moteurs ( $\omega_i$ ) de façon à reproduire les limitations physiques du quadricoptère et de ses moteurs (Tab. 4.3). L'angle  $\sigma^*$  est défini comme l'angle de roulis et de tangage maximum théorique auquel le quadricoptère peut maintenir sa position statique divisé par un facteur de sécurité de 1.5 pour tenir compte des forces perturbatrices :

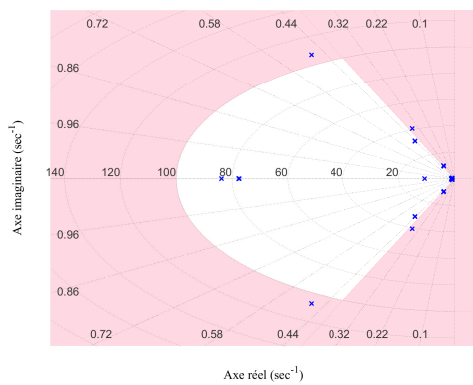
$$\sigma^* = \frac{\sigma_{\max}}{1.5}$$



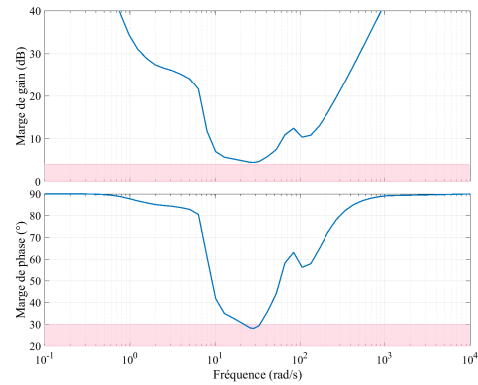
(a) Contrainte de rejet de perturbation sur  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta z$



(b) Contrainte de rejet de perturbation sur  $\Delta\psi$



(c) Contrainte sur le lieu des racines



(d) Marges de stabilité

Figure 4.5 Réponses fréquentielles et pôles en boucle fermée avec le contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$  structurée

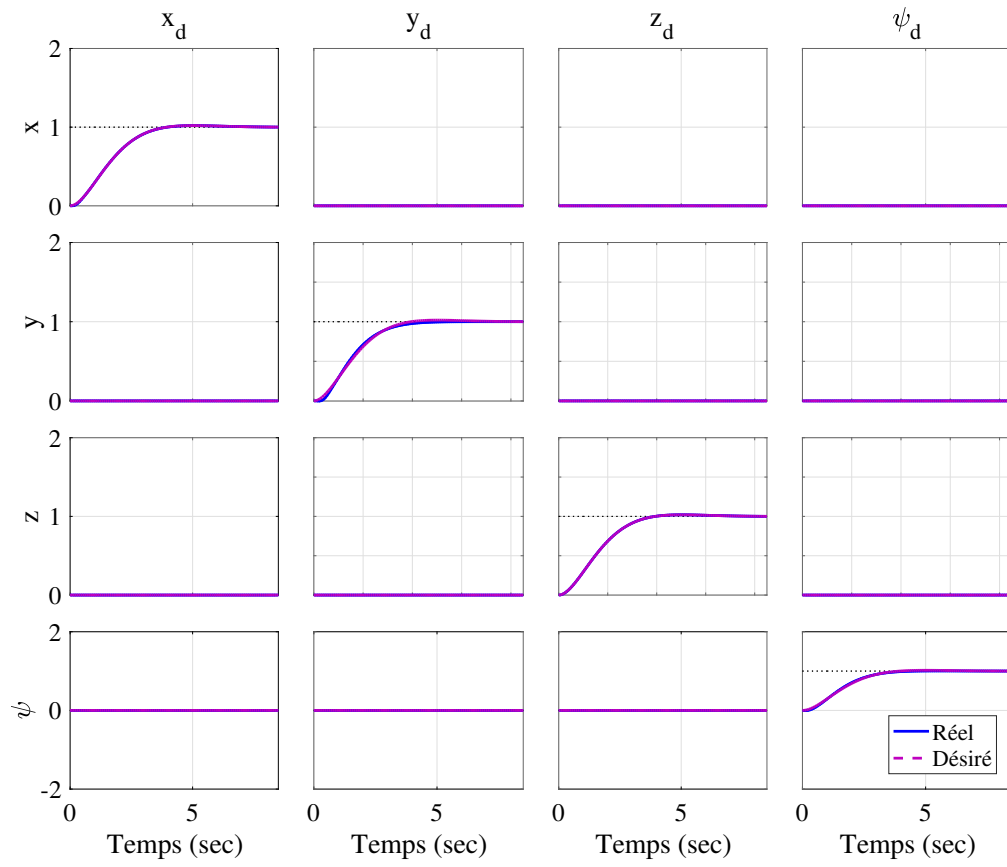


Figure 4.6 Réponses temporelles avec le contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$  structurée

$$\sigma_{\max} = \cos^{-1} \left( \frac{m g_0}{F_{t,\max}} \right)$$

où la poussée maximale  $F_{t,\max}$  provient des limitations du Pelican AscTec (2017) (9 N par moteur).

Tableau 4.3 Saturations

Minimum	Variable	Maximum
$-\sigma^*$	$\phi_d$	$+\sigma^*$
$-\sigma^*$	$\theta_d$	$+\sigma^*$
0 RPM	$\omega_i$	8600 RPM

Les paramètres de simulation sont présentés dans les tableaux 4.1 et 4.2. Elles sont conduites en utilisant le modèle non linéaire de (3.16).

Un bruit blanc gaussien possédant une densité spectrale de  $0.1 \text{ m}^2/\text{s}$  et une fréquence de 10 Hz est aussi utilisée dans le modèle de vent de Dryden afin de générer une composante de vent aléatoire pour le vecteur vent (3.7). L'entrée de vent est présentée à la figure 4.7.

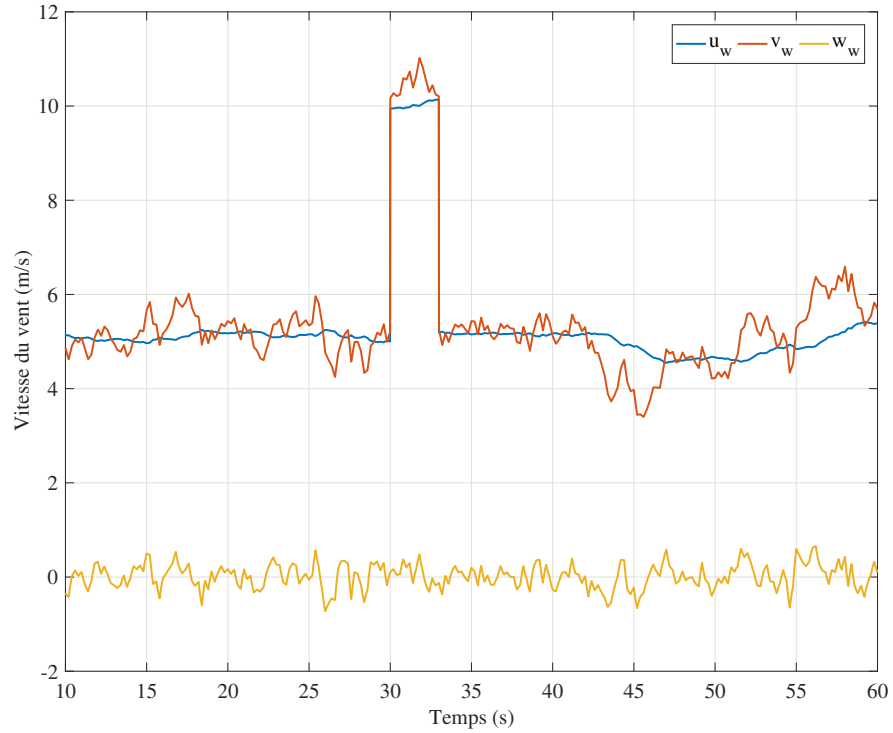


Figure 4.7 Entrée de vent



### 4.3.1 Scénario de vol en maintien de position

Les réponses temporelles et spatiales du quadricoptère pour le premier scénario sont données aux figures 4.8 et 4.9. La figure 4.8 montre la réponse en position du quadricoptère suite à une rafale de vent (selon les axes  $\mathbf{x}_i$ ,  $\mathbf{y}_i$  et  $\mathbf{z}_i$ ) sur une période de 60 secondes pour les deux méthodes de synthèse étudiées. La figure 4.9 montre ces mêmes résultats en termes de position dans le plan horizontal et en trois dimensions. On peut y voir la réponse transitoire (suite à une perturbation à 30 secondes sur 3 secondes) ainsi que la réponse en régime permanent ( $t \rightarrow \infty$ ). Les résultats montrent que le contrôleur conçu avec la technique  $\mathcal{H}_\infty$  structurée offre de meilleurs résultats : l'erreur maximale sur la position est plus petite et le temps de réponse est plus rapide. Ceci s'explique par la forte contrainte imposée pour atténuer les effets du vent sur la réponse temporelle et les contraintes structurées au niveau du suivi de position qui imposait une constante de temps rapide ( $\tau = 1$ ). La figure 4.8 montre également que le quadricoptère reste plus près de l'origine avec le contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$  que le contrôleur LQR.

La figure 4.10 montre l'évolution de la commande envoyée aux moteurs pour les deux lois de commande étudiées. On y voit que la commande pour le contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$  structuré présente de plus grands dépassements, ce qui était à prévoir. Effectivement, les réponses temporelles montrent un système en boucle fermée plus rapide pour le contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$  structuré.

Une analyse statistique réalisée sur les réponses en position ( $x$ ,  $y$  et  $z$ ) et orientation ( $\psi$ ) de 50 simulations avec le même profil nominal de vent permet d'obtenir les résultats moyens présentés au tableau 4.4 et confirme que le contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$  structurée présente de meilleurs résultats.

Tableau 4.4 Analyse statistique

	LQR		$\mathcal{H}_\infty$ structurée	
	écart type	moyenne	écart type	moyenne
$x$ mm	66.3	6.35	37.0	1.86
$y$ mm	76.4	6.40	42.1	1.87
$z$ mm	58.4	1.15	12.1	0.12
$\psi$ °	68.6	-0.01	36.4	0

Les équations (4.3.1) à (4.3.1) montrent le détail du calcul de l'écart type et de la moyenne en prenant l'exemple de la position  $x$  pour la  $j^e$  réponse.

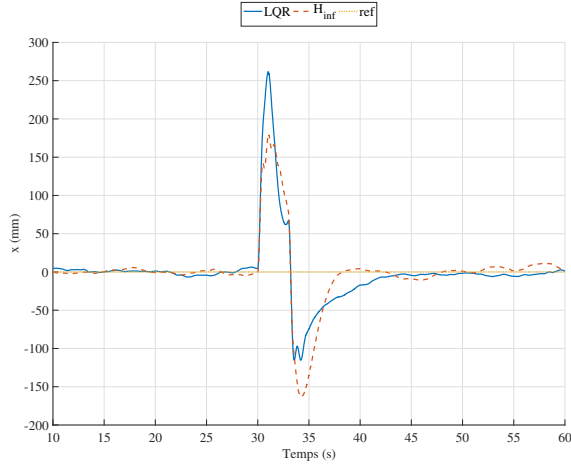
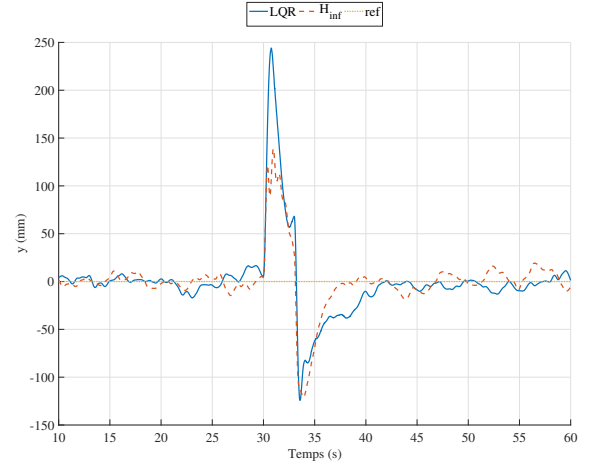
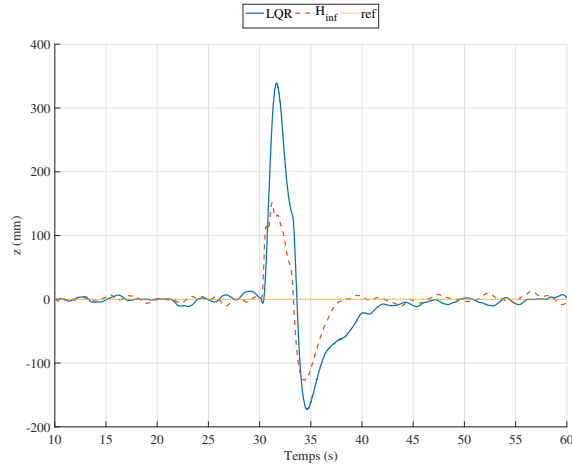
(a) Position selon  $x_i$ (b) Position selon  $y_i$ (c) Position selon  $z_i$ 

Figure 4.8 Position du quadricoptère pour un vol stationnaire lorsque soumis à une rafale

Pour le calcul de la moyenne, on utilise :

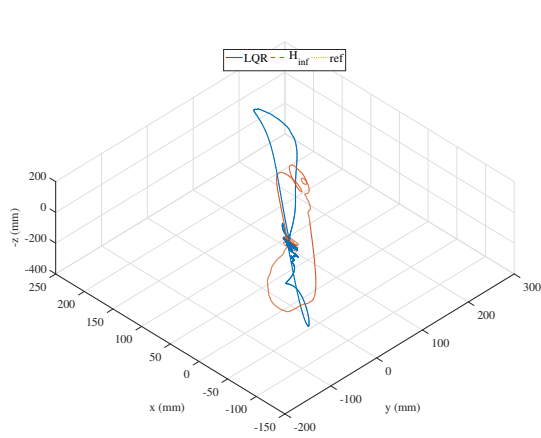
$$\bar{x}_j = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

avec  $x_i$  la position  $x$  au temps  $t_i$ .

Pour le calcul de l'écart type pour la réponse  $j$  on utilise :

$$s_j = \sqrt{\left( \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_j)^2}}{n - 1} \right)}$$

On fait ensuite la moyenne des résultats obtenus pour les 50 réponses et on trouve l'écart



(a) Position en 3D

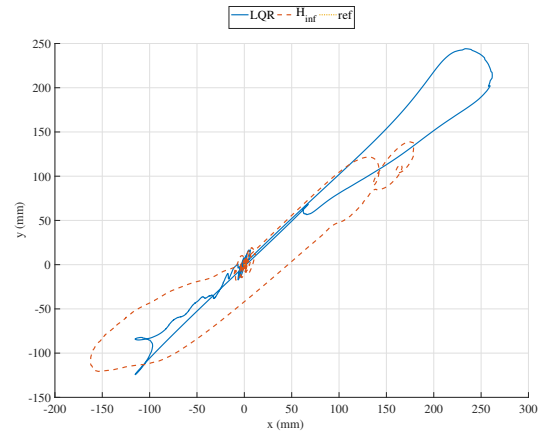
(b) Position dans le plan horizontal  $\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i$ 

Figure 4.9 Position du quadricoptère en 2D et 3D pour un vol stationnaire lorsque soumis à une rafale

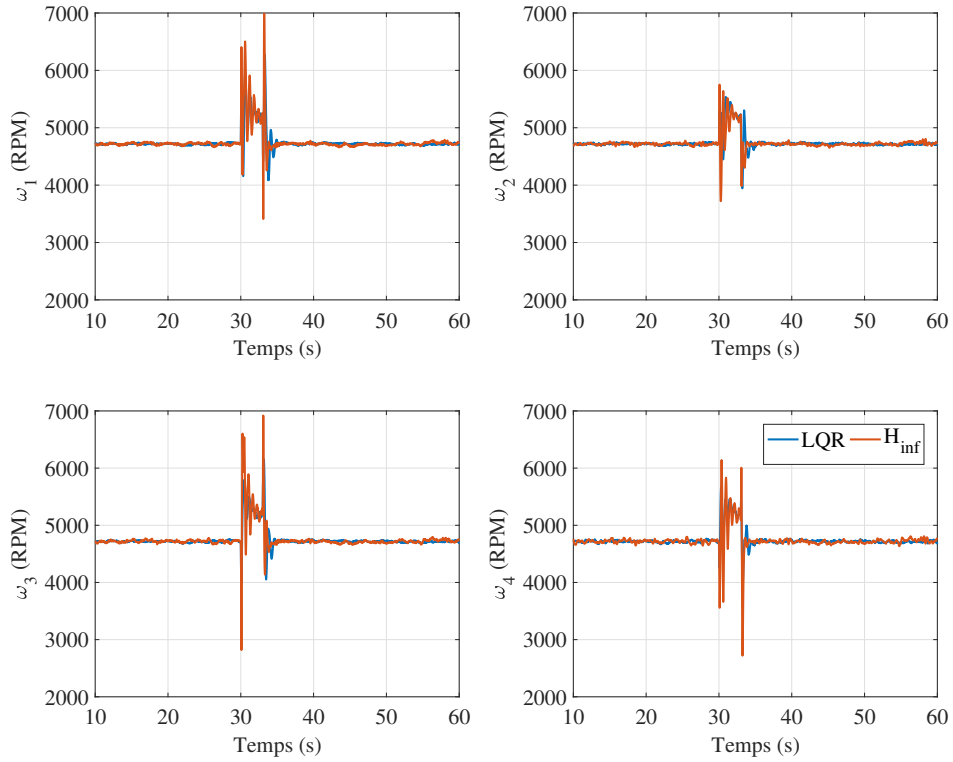


Figure 4.10 Vitesse de rotation  $\omega_i$  des moteurs pour un vol stationnaire lorsque soumis à une rafale de vent

type et la moyenne globale comme suit :

$$\bar{s} = \frac{\sum_{j=1}^{50} (s_j)}{50} , \quad \bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{50} \bar{x}_j}{50}$$

### 4.3.2 Scénario de vol en suivi de trajectoire

On simule dans cette section la réponse du quadricoptère en suivi de trajectoire sous les mêmes conditions de vent que pour le scénario précédent. On montre donc à la figure 4.11 la position dans le plan horizontal et en trois dimensions.

La trajectoire de référence ici consiste en un cercle de 1 m de rayon avec une période de 20 secondes. On voit que la loi de commande  $\mathcal{H}_\infty$  structurée est largement plus performante. En effet, un des avantages principaux de cette technique est de pouvoir optimiser les performances pour un large spectre d'utilisation. Le contrôleur LQR ayant été conçu pour des conditions de maintien de position montre ainsi une dégradation des performances où le contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$  structuré les maintient.

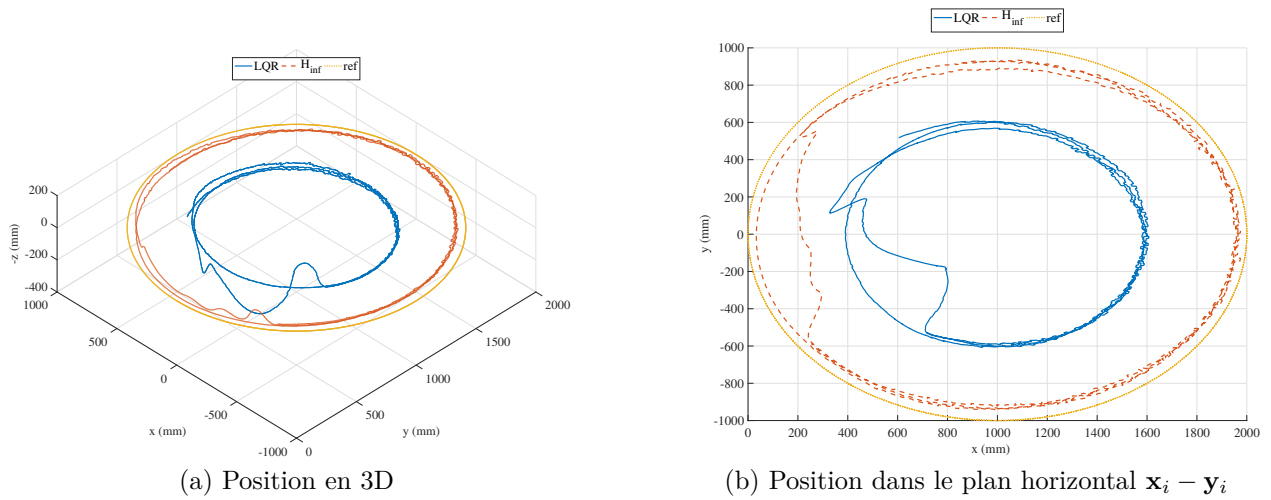


Figure 4.11 Position du quadricoptère en 2D et 3D pour un suivi de trajectoire circulaire lorsque soumis à une rafale de vent

### 4.3.3 Analyse des méthodes de synthèse LQR et $\mathcal{H}_\infty$

Après avoir utilisé les deux techniques, on peut établir les avantages et désavantages de chacune. D'un côté, la méthode LQR est très simple d'utilisation et présente une solution directe permettant de trouver rapidement des matrices de pondérations  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$  pour atteindre des performances acceptables. D'un autre côté, il s'agit d'un processus itératif qui doit être fait manuellement et qui peut vite devenir fastidieux mathématiquement pour des architectures de commande plus complexes. La synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée quant à elle, a l'avantage d'être une solution compréhensible permettant de tenir compte de différents types de contraintes qui ne pourraient pas être imposées avec d'autres méthodes. Aussi, il est aisé d'utiliser n'importe

quelle architecture de commande sans faire varier le degré de complexité de la résolution. C'est toutefois une méthode plus difficile à utiliser surtout au niveau de l'imposition des contraintes et des compromis devant être faits entre performance et stabilité. Considérant qu'il s'agit d'une solution numérique, la résolution est aussi plus longue et la convergence n'est pas toujours assurée.

## CHAPITRE 5    SYNTHÈSE $\mathcal{H}_\infty$ STRUCTURÉE MULTI-MODÈLES AVEC SÉQUENCÉMENT DES GAINS

Dans le cadre de ce projet, l'application de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée se fait sur le modèle linéarisé du système autour d'un point d'équilibre défini. Naturellement, l'utilisation de la loi de commande ainsi obtenue sur le système non linéaire tendra à perdre en stabilité et en robustesse pour un état s'éloignant de cet équilibre. Afin d'obtenir une loi robuste sur l'ensemble de l'enveloppe de vol du quadricoptère, on applique cette technique de synthèse, non pas sur un seul modèle linéarisé comme au chapitre 4, mais sur un ensemble de modèles linéarisés de façon à ce que les performances désirées soient globalement optimisées.

On commence d'abord par présenter l'architecture de commande utilisée ainsi que la définition de l'ensemble des modèles d'état linéarisés en fonction des points d'équilibre définis. On présente ensuite le processus de synthèse de la loi de commande. On verra qu'une considération explicite des termes de couplage cachés doit être faite pour assurer la stabilité de la commande sur le système non linéaire réel. On terminera en présentant les résultats d'une synthèse avec cette considération.

Dans ce chapitre, on approxime la réponse temporelle des moteurs par une fonction de transfert d'ordre 1 de constante de temps  $\tau_m$  qui peut être obtenue expérimentalement :

$$\tau_m \dot{\omega}_j + \omega_j = \omega_{j,d}$$

où  $\omega_{j,d}$  est la vitesse de rotation désirée. On utilise une constante de temps  $\tau_m = 0.0125$  sec. Ce choix a été fait dans le but de pouvoir plus facilement implanter la loi de commande synthétisée sur le Pelican étant donné que l'on connaît approximativement les paramètres des moteurs.

Le modèle d'état linéarisé des moteurs devient alors :

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\mathbf{x}}_m &= \mathbf{A}_m \Delta \mathbf{x}_m + \mathbf{B}_m \Delta \mathbf{u}_m \\ \Delta \mathbf{y}_m &= \mathbf{C}_m \Delta \mathbf{x}_m\end{aligned}$$

avec  $\Delta \mathbf{x}_m = [\Delta \omega_1 \quad \Delta \omega_2 \quad \Delta \omega_3 \quad \Delta \omega_4]^\top$ ,  $\Delta \mathbf{u}_m = [\Delta \omega_{1,d} \quad \Delta \omega_{2,d} \quad \Delta \omega_{3,d} \quad \Delta \omega_{4,d}]^\top$  et  $\Delta \mathbf{y}_m = \Delta \mathbf{x}_m$ . Les matrices  $\mathbf{A}_m$ ,  $\mathbf{B}_m$ ,  $\mathbf{C}_m$  sont données par :

$$\mathbf{A}_m = -1/\tau_m \mathbf{I}_4, \mathbf{B}_m = 1/\tau_m \mathbf{I}_4, \mathbf{C}_m = \mathbf{I}_4$$

Cela entraîne une modification au niveau du modèle linéarisé (3.28). On redéfinit alors les matrices  $\mathbf{B}_m^*$  et  $\mathbf{B}$  comme :

$$\mathbf{B}_m^* = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ J_m/\tau_m \mathbf{I}_b^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{bmatrix} \\ \mathbf{0}_{6 \times 4} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ -J_m/\tau_m \mathbf{I}_b^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{bmatrix} \\ \mathbf{0}_{6 \times 4} \\ \mathbf{B}_m \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$\mathbf{B}_m^*$  et  $\mathbf{B}$  de (3.28).

On remarque ici que le gain statique du modèle d'état des moteurs est de 1. On ne contrôle plus ici un voltage, mais la vitesse angulaire des moteurs d'où la redéfinition de  $\mathbf{u}_m$ .

### 5.1 Architecture du contrôleur

L'architecture non linéaire de commande est telle que présentée à la figure 5.1 et se base sur le découplage naturel de la dynamique du système complet. Les valeurs numériques des paramètres du quadricoptère sont présentées au chapitre précédent dans le tableau 4.1. À moins d'indications contraire, les définitions sont les mêmes qu'à la section 4.2.

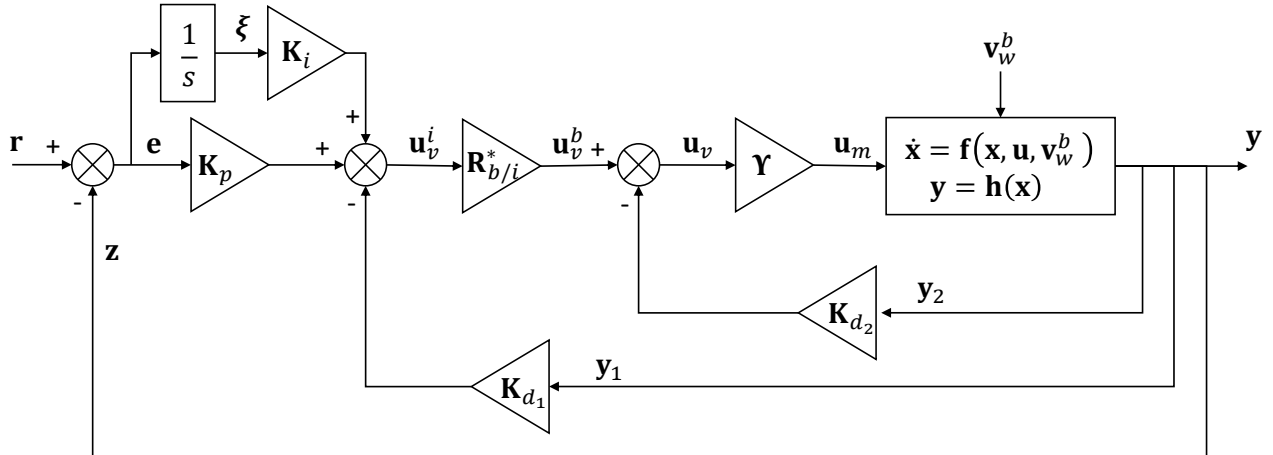


Figure 5.1 Architecture non linéaire du contrôleur pour la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée multi-modèles

Puisqu'on désire étendre la stabilité du quadricoptère à toute l'enveloppe de vol, l'hypothèse de petits angles  $\phi$  et  $\theta$  n'est plus tout à fait valide. On redéfinit donc la matrice  $\mathbf{R}_{b/i}^*$  comme

suit :

$$\mathbf{R}_{b/i}^*(\Phi) = \left[ \begin{array}{c|c} 1/c_\phi c_\theta & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \hline \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{E}(\Phi) \end{array} \right] \quad (5.2)$$

Le système en boucle ouverte peut donc être représenté par :

$$\mathcal{S} = \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_v, \mathbf{v}_w^b) \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_q) + \mathbf{n} \end{cases} \quad (5.3)$$

et la loi de commande par :

$$\mathcal{C} = \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{r} - \mathbf{z} \\ \mathbf{u}_v = \mathbf{R}_{b/i}^* [\mathbf{K}_p (\mathbf{r} - \mathbf{z}) + \mathbf{K}_i \boldsymbol{\xi} - \mathbf{K}_{d_1} \mathbf{y}_1] - \mathbf{K}_{d_2} \mathbf{y}_2 \end{cases} \quad (5.4)$$

La linéarisation de  $\mathcal{S}$  autour de l'ensemble des points d'équilibre définis par  $\phi_e$  et  $\theta_e$  permet d'obtenir un ensemble (noté  $\mathcal{S}_l$ ) de modèles d'état tel que :

$$\mathcal{S}_l = \begin{cases} \Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{i,j} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B}_{i,j} \boldsymbol{\Upsilon} \Delta \mathbf{u}_v + \mathbf{B}_w \Delta \mathbf{v}_w^b \\ \Delta \mathbf{y} = \mathbf{C} \Delta \mathbf{x}_q \end{cases} \quad (5.5)$$

où les matrices  $\mathbf{A}_{i,j}$ ,  $\mathbf{B}_{i,j}$  et  $\boldsymbol{\Upsilon}$  sont définies dans (3.28) et (5.1) tandis que  $\mathbf{C}$  représente la matrice de sortie obtenue par la linéarisation de (5.3). L'ensemble des points d'équilibre est défini à la section 5.2.

On utilisera également la forme linéaire de  $\mathcal{C}$  suivante :

$$\mathcal{C}_l = \begin{cases} \Delta \dot{\boldsymbol{\xi}} = \Delta \mathbf{r} - \Delta \mathbf{z} \\ \Delta \mathbf{u}_v = \mathbf{R}_{b/i,e}^* [\mathbf{K}_{p,e} (\Delta \mathbf{r} - \Delta \mathbf{z}) + \mathbf{K}_{i,e} \Delta \boldsymbol{\xi} - \mathbf{K}_{d_1,e} \Delta \mathbf{y}_1] - \mathbf{K}_{d_2,e} \Delta \mathbf{y}_2 \end{cases} \quad (5.6)$$

## 5.2 Système multi-modèles et points d'équilibre

À des fins de simplicité, on pose l'hypothèse d'un vol dans le plan  $\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i$  avec une orientation en  $\psi$  nulle ( $\psi_e = 0$ ). Il devient alors possible de définir l'équilibre en posant  $\phi_e$  et  $\theta_e$ . À partir des équations (3.21) à (3.23), on peut alors exprimer la vitesse aérodynamique à l'équilibre dans  $\mathcal{F}_b$ .

Pour un vol horizontal, la force de poussée requise pour assurer l'équilibre des forces verticales



est :

$$F_{t,e}^b = -\frac{m g_0}{\cos \phi_e \cos \theta_e} \quad (5.7)$$

celle-ci est obtenue si  $\forall j \in \{1, 2, 3, 4\}$  :

$$\omega_{j,e} = \omega_e = \sqrt{\frac{F_{t,e}^b}{n k_t}} \quad (5.8)$$

Il est alors possible, en utilisant les relations trigonométriques (3.25), d'évaluer les composantes de  $\mathbf{v}_{a,e}^b$ , soit :

$$u_{a,e} = -\text{sign}(\theta_e) \sqrt{\frac{m g_0 \sin^2 \theta_e}{k_a \sqrt{\sin^2 \theta_e + \sin^2 \phi_e \cos^2 \theta_e + \left(\frac{F_{t,e}^b}{m g_0} + \cos \phi_e \cos \theta_e\right)^2}}} \quad (5.9)$$

$$v_{a,e} = \text{sign}(\phi_e) \sqrt{\frac{m g_0 \sin^2 \phi_e \cos^2 \theta_e}{k_a \sqrt{\sin^2 \theta_e + \sin^2 \phi_e \cos^2 \theta_e + \left(\frac{F_{t,e}^b}{m g_0} + \cos \phi_e \cos \theta_e\right)^2}}} \quad (5.10)$$

$$w_{a,e} = -g_0 \sqrt{\frac{m g_0 \left(\frac{F_{t,e}^b}{m g_0} + \cos \phi_e \cos \theta_e\right)^2}{k_a \sqrt{\sin^2 \theta_e + \sin^2 \phi_e \cos^2 \theta_e + \left(\frac{F_{t,e}^b}{m g_0} + \cos \phi_e \cos \theta_e\right)^2}}} \quad (5.11)$$

Pour la synthèse multi-modèles, on définit les angles  $\theta_e$  et  $\phi_e$  de séquençage du quadricoptère en fonction de l'angle extrême  $\sigma = 25^\circ$ . On a ainsi :

$$\phi_e \in \begin{bmatrix} -\sigma & -\frac{\sigma}{2} & 0 & \frac{\sigma}{2} & \sigma \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

$$\theta_e \in \begin{bmatrix} -\sigma & -\frac{\sigma}{2} & 0 & \frac{\sigma}{2} & \sigma \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

La vitesse  $\mathbf{v}_{a,e}^b$  dans  $\mathcal{F}_b$  pour chacune des combinaisons est présentée dans le tableau 5.1 et la vitesse de rotation des moteurs  $\omega_e$  est présentée dans le tableau 5.2.

### 5.2.1 Paramétrisation des matrices de gains

Comme à la section 4.2, on cherche à imposer des contraintes autant en stabilité qu'en performance et robustesse, mais sur un ensemble de modèles d'état  $\mathcal{S}_l$  défini à la section 5.2. Pour ce faire, il est possible d'utiliser une fonction de séquençement nommée  $f$  pour paramé-

Tableau 5.1 Vitesses aérodynamique  $\mathbf{v}_{a,e}^b$  à l'équilibre dans  $\mathcal{F}_b$  en m/s

$\theta_{e,j} \phi_{e,i}$	$-\sigma$	0	$\sigma$
$-\sigma$	$[9.4 \ -8.5 \ -8.8]^\top$	$[11.5 \ 0 \ -5.3]^\top$	$[9.4 \ 8.5 \ -8.8]^\top$
0	$[0 \ -11.5 \ -5.3]^\top$	$[0 \ 0 \ 0]^\top$	$[0 \ 11.5 \ -5.3]^\top$
$\sigma$	$[-9.4 \ -8.5 \ -8.8]^\top$	$[-11.5 \ 0 \ -5.3]^\top$	$[-9.4 \ 8.5 \ -8.8]^\top$

Tableau 5.2 Vitesse de rotation à l'équilibre des moteurs  $\omega_e$  en rad/s

$\theta_{e,j} \phi_{e,i}$	$-\sigma$	0	$\sigma$
$-\sigma$	585	556	585
0	556	530	556
$\sigma$	585	556	585

trer les matrices de gains  $\mathbf{K}_i$ ,  $\mathbf{K}_p$ ,  $\mathbf{K}_{d_1}$  et  $\mathbf{K}_{d_2}$  selon des variables d'état comme dans (Rugh and Shamma, 2000). En augmentant ainsi les degrés de liberté de la loi de commande, il devient plus aisé de rencontrer les contraintes de robustesse imposées, et ce, près de chacun des points d'équilibre utilisés pour la synthèse. Puisque l'ensemble des modèles d'état utilisés a été évalué en fonction des variables  $\phi$  et  $\theta$  à l'équilibre, ce seront ces deux variables qui seront utilisées pour paramétrer la fonction de séquençement,  $f(\phi, \theta)$ .

La méthodologie suivante est employée pour évaluer les gains de  $f$  :

1. Établissement des contraintes à respecter ;
2. Synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée à gains fixes ( $f = f_1 = \mathbf{K}$ ) sur le modèle LTI en équilibre stationnaire ( $\mathbf{x}_{q,e} = \mathbf{0}$ ) pour des valeurs initiales aléatoires des gains ;
3. Validation des contraintes : est-ce que  $\gamma < 1$  ? Si non, retour à 1 ;
4. Synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée à gains fixes ( $f = f_1 = \mathbf{K}$ ) sur l'ensemble  $\mathcal{S}$  en utilisant comme valeurs initiales les gains obtenus en 2. ;
5. Synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée avec fonction de séquençement  $f = f_2(\phi, \theta)$  sur l'ensemble  $\mathcal{S}_l$

- en utilisant comme valeurs initiales les gains obtenus en 4. ;
6. Synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée avec fonction de séquençement  $f = f_3(\phi, \theta)$  sur l'ensemble  $\mathcal{S}_l$  en utilisant comme valeurs initiales les gains obtenus en 5. ;
  7. etc.

Le choix de cette méthode repose sur le fait que la fonction **sysune** correspond à un algorithme d'optimisation qui tend à trouver une solution optimale localement. Les résultats obtenus sont donc intrinsèquement liés aux valeurs initiales des gains et la convergence n'est pas toujours assurée.

En faisant une première synthèse à gains fixes sur le modèle LTI en équilibre stationnaire, on obtient une solution rapidement (peu de paramètres à optimiser par rapport à la synthèse avec séquençement, et ce, pour un modèle unique). On s'assure ainsi d'avoir une solution stable pour un vol stationnaire. Cela permet aussi de valider que les contraintes imposées sont réalistes et atteignables, *i.e.*, que  $\gamma < 1$ . Si les contraintes ne sont pas rencontrées pour le vol stationnaire,  $\phi = 0$  et  $\theta = 0$ , il serait illusoire de croire qu'elles le seraient pour l'ensemble de l'enveloppe de vol. Une fois la validation faite, pour étendre les performances, on augmente graduellement la complexité de la fonction de séquençement. On guide ainsi la résolution en augmentant d'une part, la rapidité de synthèse et, d'autre part, les chances de convergence.

De plus, pour s'assurer d'avoir une solution physiquement réaliste et stable, on bloque certains degrés de liberté des matrices de gains en forçant des coefficients à 0, par exemple :  $\psi$  et  $r$  ne devraient jamais affecter  $F_z$ , puisque  $F_z$  est en tout temps orthogonal à  $\psi$  et  $r$ . Une description plus exhaustive du blocage de ces degrés de liberté est donnée à la section 5.2.2.

### 5.2.2 Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ structurée multi-modèles

En suivant la méthodologie de la section 5.2.1, on commence par établir les contraintes à respecter, soit :

- Emplacement des pôles en boucle fermée : amortissement supérieur à 0.4 et fréquence  $\in [80, 0.2]$  ;
- Bonne marges de stabilité : marge de gain de 6 dB et marge de phase de  $40^\circ$  au niveau de  $\Delta \mathbf{u}_m$  ;
- Temps de réponse de 4 secondes pour les sorties  $\Delta \mathbf{z}$  ( $\tau = 1$ ) et un dépassement  $d = 2\%$  ;
- Suivi par  $\mathbf{z}$  du modèle de référence  $G(s) = (1/\tau)^2 / (s^2 + 2(\zeta/\tau)s + (1/\tau)^2)$  avec  $\zeta = \cos(\text{atan}(\pi / -\log d))$  ;
- Saturation des moteurs : un gain maximal de 600 dB de la fonction de transfert entre  $\Delta \mathbf{y}$  et  $\Delta \mathbf{u}$  ;

Ces contraintes sont présentées dans le tableau 5.3.

Tableau 5.3 Requis pour la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée

Requis	Objectif
Pôles en boucle fermée	amortissement $> 0.4$ $0.2 < \text{fréquence} < 80$
Stabilité de $\Delta \mathbf{u}_m$ en boucle ouverte	marge de gain $> 6$ dB marge de phase $> 40^\circ$
Suivi de trajectoire	constante de temps $\tau = 1$ s dépassement $< 2\%$
Saturation des moteurs	Gains maximal de 600 dB

En appliquant ces contraintes au modèle LTI pour un équilibre en vol stationnaire ( $\phi_e = \theta_e = 0$ ), on obtient un critère de satisfaction des contraintes  $\mathcal{H}_\infty$  structurées  $\gamma = 0.9925 < 1$  en 5.1 secondes. On peut donc passer à l'étape suivante qui consiste en la synthèse séquentielle des gains pour les fonctions de séquencement :

- $f_1 = \mathbf{K}_0$
- $f_2 = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1 \phi + \mathbf{K}_2 \theta$  ;
- $f_3 = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1 \phi + \mathbf{K}_2 \theta + \mathbf{K}_3 \phi^2 + \mathbf{K}_4 \theta^2$  ;

Pour avoir une solution physiquement réaliste et stable, on bloque, tel que mentionné précédemment, certains degrés de liberté des matrices de gains en forçant des coefficients à 0. Une synthèse LQR est préalablement faite pour  $\phi_e = \theta_e = 0$ . Le choix des coefficients forcés à 0 pour les matrices  $\mathbf{K}_{x,0}$  est donc tel à reproduire la forme de la matrice LQR obtenue et naturellement découpée<sup>1</sup> :

$$\mathbf{K}_{i/p,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{d1,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{d2,0} = \begin{bmatrix} x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}$$

Le même principe est utilisé pour  $\phi_e \neq 0$  et  $\theta_e = 0$ . Le choix des coefficient forcé à 0 pour les

---

1. La valeur 0 représente les coefficients bloqués et x, les coefficients libres.

matrices  $\mathbf{K}_{x,1}$  et  $\mathbf{K}_{x,3}$  est donc :

$$\mathbf{K}_{i/p,1/3} = \begin{bmatrix} 0 & x & x & 0 \\ 0 & x & x & 0 \\ x & 0 & 0 & x \\ x & 0 & 0 & x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{d_1,1/3} = \begin{bmatrix} x & x & 0 & 0 \\ x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{d_2,1/3} = \begin{bmatrix} x & x & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & x \end{bmatrix}$$

Finalement, pour  $\phi_e = 0$  et  $\theta_e \neq 0$ , le choix des coefficients forcés à 0 pour les matrices  $\mathbf{K}_{x,2}$  et  $\mathbf{K}_{x,4}$  est :

$$\mathbf{K}_{i/p,2/4} = \begin{bmatrix} x & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & x \\ x & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{d_1,2/4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x & x \\ x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & x \\ x & x & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{d_2,2/4} = \begin{bmatrix} x & x & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & x & x \\ x & x & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}$$

Le critère de satisfaction  $\gamma$  obtenu pour les différentes synthèses est présenté dans le tableau 5.4.

La fonction `tunableSurface` de MATLAB<sup>®</sup> est utilisée pour synthétiser les gains. Celle-ci permet de définir une surface de gain en fonction de valeurs initiales, d'un domaine et d'une fonction de séquençement. Le domaine est obtenu grâce à la fonction `ndgrid` avec en entrées  $\phi_e$  et  $\theta_e$ .

Tableau 5.4 Critère de satisfaction  $\mathcal{H}_\infty$  structurée selon la fonction de gains  $f_i$

Fonction de gains $f$	$\gamma$	Durée (sec)
$f_1$	4.4999	18.7
$f_2$	1.3444	46.9
$f_3$	0.9971	26.5

Bien que la présente synthèse rencontre les contraintes imposées pour la structure de la fonction de séquençement  $f_3$ , la stabilité et la robustesse n'est pas du tout garantie sur le système non linéaire. On remarque que les pôles en boucle fermée obtenus lors de la synthèse sur le système linéaire ne sont pas les mêmes que ceux obtenus en linéarisant le système non linéaire en boucle fermée. La figure 5.2 montre la différence entre les pôles attendus (système linéaire avec contrôleur) et les pôles réels (système non linéaire en boucle fermée linéarisé) pour la fonction de séquençement  $f_3$  si  $\phi_e = \theta_e = -\sigma$ . On voit d'ailleurs que la dynamique du système non linéaire à ce point d'équilibre présente des pôles instables. On

en conclut que la loi de commande linéaire  $\mathcal{C}_l$  de (5.6) est une représentation erronée de la linéarisation de la loi de commande non linéaire  $\mathcal{C}$  de (5.4). En effet, cette dernière est fonction des variables endogènes  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$  du système. Il faut donc en tenir compte dans le modèle LTI. Cette considération que l'on appelle les termes de couplage cachés est présentée à la section suivante.

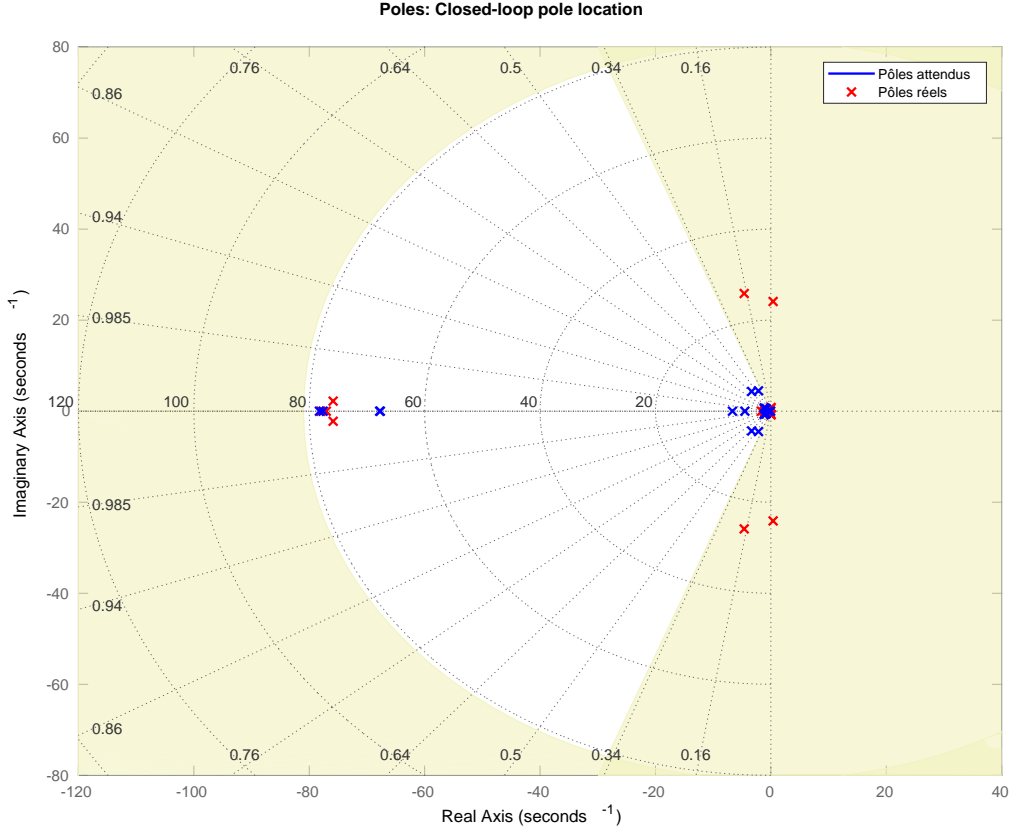


Figure 5.2 Comparaison des pôles des modèles linéaire et non linéaire

Remarque : Les pôles réels du système ont été obtenus avec la fonction `linmod` de MATLAB® appliquée au schéma `Simulink` du modèle non linéaire complet alors que les pôles du modèle linéaire correspondent aux valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}_{1,1}(-\sigma, -\sigma)$ .

### 5.2.3 Termes de couplage cachés

En linéarisant le système non linéaire en boucle fermée avec le contrôleur séquencé  $\mathcal{C}$ , on devrait théoriquement retrouver le système linéarisé en boucle fermée avec le contrôleur  $\mathcal{C}_l$  synthétisé. On remarque cependant que ce n'est pas le cas. Le contrôleur  $\mathcal{C}$  dépendant explicitement des variables endogènes du systèmes  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$ , sa linéarisation en fonction de l'état  $\mathbf{x}$  provoque l'apparition de termes parasites que l'on appelle les termes de couplage

cachés. Il est donc essentiel d'en tenir compte de façon à avoir un modèle LTI qui représente adéquatement la linéarisation du système complet en boucle fermée.

Puisque les matrices  $\mathbf{K}_i$ ,  $\mathbf{K}_p$ ,  $\mathbf{K}_{d1}$ ,  $\mathbf{K}_{d2}$  et  $\mathbf{R}_{b/i}^*$  sont explicitement fonction de variables endogènes du système  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$ , la linéarisation doit en tenir compte. On obtient ainsi :

$$\mathcal{C}_{\text{TCC}} = \begin{cases} \Delta \dot{\boldsymbol{\xi}} = \Delta \mathbf{r} - \Delta \mathbf{z} \\ \Delta \mathbf{u}_v = \mathbf{R}_{b/i,e}^* \left[ \mathbf{K}_{p,e} (\Delta \mathbf{r} - \Delta \mathbf{z}) \right. \\ \quad + \mathbf{K}_{i,e} \Delta \boldsymbol{\xi} + \left. \frac{\partial \mathbf{K}_i}{\partial \phi} \Big|_{\Phi_e} \boldsymbol{\xi}_e \Delta \phi + \frac{\partial \mathbf{K}_i}{\partial \theta} \Big|_{\Phi_e} \boldsymbol{\xi}_e \Delta \theta \right. \\ \quad - \mathbf{K}_{d1,e} \Delta \mathbf{y}_1 - \frac{\partial \mathbf{K}_{d1}}{\partial \phi} \Big|_{\Phi_e} \mathbf{y}_{1,e} \Delta \phi - \frac{\partial \mathbf{K}_{d1}}{\partial \theta} \Big|_{\Phi_e} \mathbf{y}_{1,e} \Delta \theta \Big] \\ \quad - \mathbf{K}_{d2,e} \Delta \mathbf{y}_2 - \frac{\partial \mathbf{K}_{d2}}{\partial \phi} \Big|_{\Phi_e} \mathbf{y}_{2,e} \Delta \phi - \frac{\partial \mathbf{K}_{d2}}{\partial \theta} \Big|_{\Phi_e} \mathbf{y}_{2,e} \Delta \theta \\ \quad + \frac{\partial \mathbf{R}_{b/i}^*}{\partial \phi} \Big|_{\Phi_e} [\mathbf{K}_{i,e} \boldsymbol{\xi}_e - \mathbf{K}_{d1,e} \mathbf{y}_{1,e}] \Delta \phi \\ \quad + \frac{\partial \mathbf{R}_{b/i}^*}{\partial \theta} \Big|_{\Phi_e} [\mathbf{K}_{i,e} \boldsymbol{\xi}_e - \mathbf{K}_{d1,e} \mathbf{y}_{1,e}] \Delta \theta \\ \quad + \frac{\partial \mathbf{R}_{b/i}^*}{\partial \psi} \Big|_{\Phi_e} [\mathbf{K}_{i,e} \boldsymbol{\xi}_e - \mathbf{K}_{d1,e} \mathbf{y}_{1,e}] \Delta \psi \end{cases} \quad (5.14)$$

À l'équilibre, on a :

$$\mathbf{u}_{v,e} = \mathbf{R}_{b/i,e}^* [\mathbf{K}_{i,e} \boldsymbol{\xi}_e - \mathbf{K}_{d1,e} \mathbf{y}_{1,e}] - \mathbf{K}_{d2,e} \mathbf{y}_{2,e} \quad (5.15)$$

d'où

$$\mathbf{K}_{i,e} \boldsymbol{\xi}_e - \mathbf{K}_{d1,e} \mathbf{y}_{1,e} = (\mathbf{R}_{b/i,e}^*)^{-1} [\mathbf{u}_{v,e} + \mathbf{K}_{d2,e} \mathbf{y}_{2,e}] \quad (5.16)$$

La loi de commande linéarisée peut finalement être simplifiée :

$$\mathcal{C}_{\text{TCC}} = \left\{ \begin{array}{l} \Delta \dot{\boldsymbol{\xi}} = \Delta \mathbf{r} - \Delta \mathbf{z} \\ \Delta \mathbf{u}_v = \mathbf{R}_{b/i,e}^* \left[ \mathbf{K}_{p,e} (\Delta \mathbf{r} - \Delta \mathbf{z}) \right. \\ \quad \left. + \mathbf{K}_{i,e} \Delta \boldsymbol{\xi} + \frac{\partial \mathbf{K}_i}{\partial \phi} \Big|_{\Phi_e} \boldsymbol{\xi}_e \Delta \phi + \frac{\partial \mathbf{K}_i}{\partial \theta} \Big|_{\Phi_e} \boldsymbol{\xi}_e \Delta \theta \dots \right. \\ \quad \left. - \mathbf{K}_{d1,e} \Delta \mathbf{y}_1 - \frac{\partial \mathbf{K}_{d1}}{\partial \phi} \Big|_{\Phi_e} \mathbf{y}_{1,e} \Delta \phi - \frac{\partial \mathbf{K}_{d1}}{\partial \theta} \Big|_{\Phi_e} \mathbf{y}_{1,e} \Delta \theta \right] \\ \quad - \mathbf{K}_{d2,e} \Delta \mathbf{y}_2 - \frac{\partial \mathbf{K}_{d2}}{\partial \phi} \Big|_{\Phi_e} \mathbf{y}_{2,e} \Delta \phi - \frac{\partial \mathbf{K}_{d2}}{\partial \theta} \Big|_{\Phi_e} \mathbf{y}_{2,e} \Delta \theta \\ \quad + \mathbf{R}_\phi [\mathbf{u}_{v,e} + \mathbf{K}_{d2,e} \mathbf{y}_{2,e}] \Delta \phi + \mathbf{R}_\theta [\mathbf{u}_{v,e} + \mathbf{K}_{d2,e} \mathbf{y}_{2,e}] \Delta \theta \\ \quad + \mathbf{R}_\psi [\mathbf{u}_{v,e} + \mathbf{K}_{d2,e} \mathbf{y}_{2,e}] \Delta \psi \end{array} \right. \quad (5.17)$$

où

$$\boldsymbol{\xi}_e = (\mathbf{K}_{i,e})^{-1} \left[ (\mathbf{R}_{b/i,e}^*)^{-1} [\mathbf{u}_{v,e} + \mathbf{K}_{d2,e} \mathbf{y}_{2,e}] + \mathbf{K}_{d1,e} \mathbf{y}_{1,e} \right] \quad (5.18)$$

$$\mathbf{R}_\phi = \frac{\partial \mathbf{R}_{b/i}^*}{\partial \phi} \Big|_{\Phi_e} (\mathbf{R}_{b/i,e}^*)^{-1} = \begin{bmatrix} t_\phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

$$\mathbf{R}_\theta = \frac{\partial \mathbf{R}_{b/i}^*}{\partial \theta} \Big|_{\Phi_e} (\mathbf{R}_{b/i,e}^*)^{-1} = \begin{bmatrix} t_\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s_\phi & -c_\phi \\ 0 & s_\phi & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

$$\mathbf{R}_\psi = \frac{\partial \mathbf{R}_{b/i}^*}{\partial \psi} \Big|_{\Phi_e} (\mathbf{R}_{b/i,e}^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_\phi c_\theta & -s_\phi c_\theta \\ 0 & -c_\phi c_\theta & 0 & -s_\theta \\ 0 & s_\phi c_\theta & s_\theta & 0 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

À la section 5.2.2, on a utilisé la fonction `tunableSurface`. Comme on a pu le voir, celle-ci n'est pas valide, car elle ne tient pas compte des TCC. On choisit donc de ne pas utiliser cette fonction, mais plutôt construire le modèle LTI adéquat du système en boucle fermée. Cette construction peut prendre différentes formes : un modèle `Simulink` modifié, l'utilisation de la fonction `connect` ou une construction algébrique des matrices d'état.

En raison de sa simplicité d'utilisation pour une synthèse multi-modèles, on favorise l'utilisa-



tion de la fonction `connect` pour la suite. Les modèles d'état en boucle fermée ainsi obtenus sont directement utilisés comme arguments de l'algorithme d'optimisation `systeme`. Afin de pouvoir utiliser ce dernier, les gains doivent toutefois être constants. Il faut donc en réarranger la formulation. Celle-ci prend la forme générale suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{x,e} &= \mathbf{K}_{x,c} \mathbf{F}_p(\phi_e, \theta_e) \\ \left. \frac{\partial \mathbf{K}_x}{\partial \phi} \right|_{\Phi_e} &= \mathbf{K}_{i,c} \mathbf{F}_{\phi,p}(\phi_e, \theta_e) \end{aligned}$$

où  $p$  représente le nombre d'entrées de la matrice constante  $\mathbf{K}_{x,c}$  et :

$$\mathbf{K}_{x,c} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{x,0} & \mathbf{K}_{x,1} & \dots & \mathbf{K}_{x,n} \end{bmatrix}$$

avec  $n$  le nombre de termes de la fonction de séquençement.

À titre d'exemple, si la fonction de gains est :

$$\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1 \phi + \mathbf{K}_2 \theta + \mathbf{K}_3 \phi^2 + \mathbf{K}_4 \theta^2$$

les fonctions  $\mathbf{F}$  prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_p(\phi, \theta) &= \begin{bmatrix} 1 & \phi & \theta & \phi^2 & \theta^2 \end{bmatrix}^\top \otimes \mathbf{I}_p \\ \mathbf{F}_{\phi,p}(\phi, \theta) &= \frac{\partial \mathbf{F}_p}{\partial \phi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2\phi & 0 \end{bmatrix}^\top \otimes \mathbf{I}_p \\ \mathbf{F}_{\theta,p}(\phi, \theta) &= \frac{\partial \mathbf{F}_p}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2\theta \end{bmatrix}^\top \otimes \mathbf{I}_p \end{aligned}$$

Ceci permet de réécrire (5.17) comme :

$$\mathcal{C}_{\text{TCC}} = \begin{cases} \Delta \dot{\boldsymbol{\xi}} = \Delta \mathbf{r} - \Delta \mathbf{z} \\ \Delta \mathbf{u}_v = \mathbf{R}_{b/i,e}^* \left[ \mathbf{K}_{p,c} \mathbf{F}_4 (\Delta \mathbf{r} - \Delta \mathbf{z}) \right. \\ \quad + \mathbf{K}_{i,c} (\mathbf{F}_4 \Delta \boldsymbol{\xi} + \mathbf{F}_{\phi,4} \boldsymbol{\xi}_e \Delta \phi + \mathbf{F}_{\theta,4} \boldsymbol{\xi}_e \Delta \theta) \dots \\ \quad \left. - \mathbf{K}_{d1,c} (\mathbf{F}_4 \Delta \mathbf{y}_1 - \mathbf{F}_{\phi,4} \mathbf{y}_{1,e} \Delta \phi - \mathbf{F}_{\theta,4} \mathbf{y}_{1,e} \Delta \theta) \right] \\ \quad - \mathbf{K}_{d2,e} (\mathbf{F}_8 \Delta \mathbf{y}_2 - \mathbf{F}_{\phi,8} \mathbf{y}_{2,e} \Delta \phi - \mathbf{F}_{\theta,8} \mathbf{y}_{2,e} \Delta \theta) \\ \quad + \mathbf{R}_\phi [\mathbf{u}_{v,e} + \mathbf{K}_{d2,c} \mathbf{F}_8 \mathbf{y}_{2,e}] \Delta \phi + \mathbf{R}_\theta [\mathbf{u}_{v,e} + \mathbf{K}_{d2,c} \mathbf{F}_8 \mathbf{y}_{2,e}] \Delta \theta \\ \quad \left. + \mathbf{R}_\psi [\mathbf{u}_{v,e} + \mathbf{K}_{d2,c} \mathbf{F}_8 \mathbf{y}_{2,e}] \Delta \psi \right] \end{cases} \quad (5.22)$$

On obtient ainsi le modèle d'état en boucle fermée :

$$\mathcal{S}_{\text{cl}} = \begin{cases} \Delta \dot{\mathbf{x}}_{\text{cl}} = \mathbf{A}_{\text{cl}i,j} \Delta \mathbf{x}_{\text{cl}} + \mathbf{B}_{\text{cl}i,j} \Delta \mathbf{r} + \mathbf{B}_{w\ i,j} \Delta \mathbf{v}_w^b \\ \Delta \mathbf{z} = \mathbf{C}_{\text{cl}i,j} \Delta \mathbf{x}_{\text{cl}} \end{cases}$$

où  $\Delta \mathbf{x}_{\text{cl}} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}^\top & \Delta \boldsymbol{\xi}^\top \end{bmatrix}^\top$  correspond au vecteur d'état en boucle fermée qui contient les états du système  $\mathcal{S}$  et de la loi de commande  $\mathcal{C}$ . Les matrices d'état de ce système complet en boucle fermée sont :

$$\mathbf{A}_{\text{cl}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0}_{20 \times 4} \\ \mathbf{0}_{4 \times 20} & \mathbf{0}_{4 \times 4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \left( \mathbf{TCC}^* - \mathbf{R}_{b/i}^* \mathbf{K}_{d_1} \mathbf{F}_4 \mathbf{C}_1 - \mathbf{K}_{d_2} \mathbf{F}_8 \mathbf{C}_2 \right) & \mathbf{0}_{20 \times 8} & \mathbf{B} \mathbf{R}_{b/i}^* \mathbf{K}_i \mathbf{F}_4 \\ \hline & -\mathbf{C}_i & \mathbf{0}_{4 \times 12} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{\text{cl}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \mathbf{R}_{b/i}^* \mathbf{K}_p \mathbf{F}_4 \\ \hline \mathbf{0}_{4 \times 4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\text{cl}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_i & \mathbf{0}_{4 \times 12} \end{bmatrix}$$

avec

$$\mathbf{TCC}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 4} \\ -(\mathbf{R}_{b/i}^* \mathbf{K}_p \mathbf{F}_4(:,1:3))^\top \\ \mathbf{R}_\phi(\mathbf{u}_{v,e} + \mathbf{K}_{d_2} \mathbf{F}_8 \mathbf{y}_{2,e}) + \mathbf{R}_{b/i}^*(\mathbf{K}_i \mathbf{F}_{\phi 4} \boldsymbol{\xi}_e - \mathbf{K}_{d_1} \mathbf{F}_{\phi 4} \mathbf{y}_{1,e}) - \mathbf{K}_{d_2} \mathbf{F}_{\phi 8} \mathbf{y}_{2,e}) \\ \mathbf{R}_\theta(\mathbf{u}_{v,e} + \mathbf{K}_{d_2} \mathbf{F}_8 \mathbf{y}_{2,e}) + \mathbf{R}_{b/i}^*(\mathbf{K}_i \mathbf{F}_{\theta 4} \boldsymbol{\xi}_e - \mathbf{K}_{d_1} \mathbf{F}_{\theta 4} \mathbf{y}_{1,e}) - \mathbf{K}_{d_2} \mathbf{F}_{\theta 8} \mathbf{y}_{2,e}) \\ \mathbf{R}_\psi(\mathbf{u}_{v,e} + \mathbf{K}_{d_2} \mathbf{F}_8 \mathbf{y}_{2,e}) - \mathbf{R}_{b/i}^* \mathbf{K}_p \mathbf{F}_4(:,4) \end{bmatrix}^\top$$

Pour simplifier la notation, on définit également les matrices  $\mathbf{C}_x$  suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{i(4 \times 12)}(:, [7 \ 8 \ 9 \ 12]) &= \mathbf{I}_4 \\ \mathbf{C}_{1(4 \times 12)}(:, [2 \ 8 \ 1 \ 7]) &= \mathbf{I}_4 \\ \mathbf{C}_{2(8 \times 12)}(:, [3 \ 9 \ 4 \ 10 \ 5 \ 11 \ 6 \ 12]) &= \mathbf{I}_8 \end{aligned}$$

La figure 5.3 montre le schéma du système en boucle fermée  $\mathcal{S}_{\text{cl}}$  en considérant explicitement



Tableau 5.5 Norme  $\mathcal{H}_\infty$  selon la fonction de gains

Fonction de gains $f$	$\gamma$	Durée (sec)
$f_1$	4.0129	18.9
$f_2$	1.3624	60.2
$f_3$	0.9957	26.5

### 5.2.5 Simulations

Le tableau 5.6 montre les résultats de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée obtenus pour les quatre contraintes imposées. De la même façon qu'à la section 4.3, on voit que les contraintes  $\mathcal{H}_\infty$  imposées ont été respectées tel que le traduit  $\gamma \leq 1$ .

Tableau 5.6 Niveau de satisfaction des contraintes  $\mathcal{H}_\infty$  structurées

Contrainte $\mathcal{H}_\infty$ structurée	$\gamma$
Placement des pôles	0.9905
Marges de stabilité	0.9907
Suivi de trajectoire	0.9957
Saturation des actionneurs	0.9909

Dans cette section, on simule les réponses temporelles du système en comparant le contrôleur à gains fixes synthétisé pour un équilibre en vol stationnaire (*i.e.*, le contrôleur nominal), et le contrôleur avec séquençement des gains. Les simulations sont réalisées dans **Simulink**. On compare ainsi les réponses temporelles pour deux scénarios différents : un premier dans lequel le quadricoptère est en vol stationnaire et un second où il doit suivre une trajectoire en forme d'infini  $\infty$ . Dans les deux scénarios, le quadricoptères est soumis à différents échelons de vent orientés nord-sud.

L'objectif de ces simulations est de valider que l'utilisation de la loi de commande avec séquençement des gains améliore les performances pour des points d'opération du quadricoptère présentant une forte inclinaison en  $\phi$  et  $\theta$ . Les paramètres de simulation sont les mêmes qu'à la section 4.3. Ceux-ci sont présentés dans les tableaux 4.1 et 4.2.

### 5.2.6 Stabilité stationnaire du quadricoptère dans un environnement de vents changeant

On simule dans cette section le comportement du quadricoptère en maintien de position lorsque soumis à différents échelons de vent. Pour générer un tel vent, un WGN possédant une densité spectrale de  $0.1 \text{ m}^2/\text{s}$  et une fréquence de 10 Hz sont utilisés dans le modèle de vent de Dryden. L'entrée de vent est présentée à la figure 5.4.

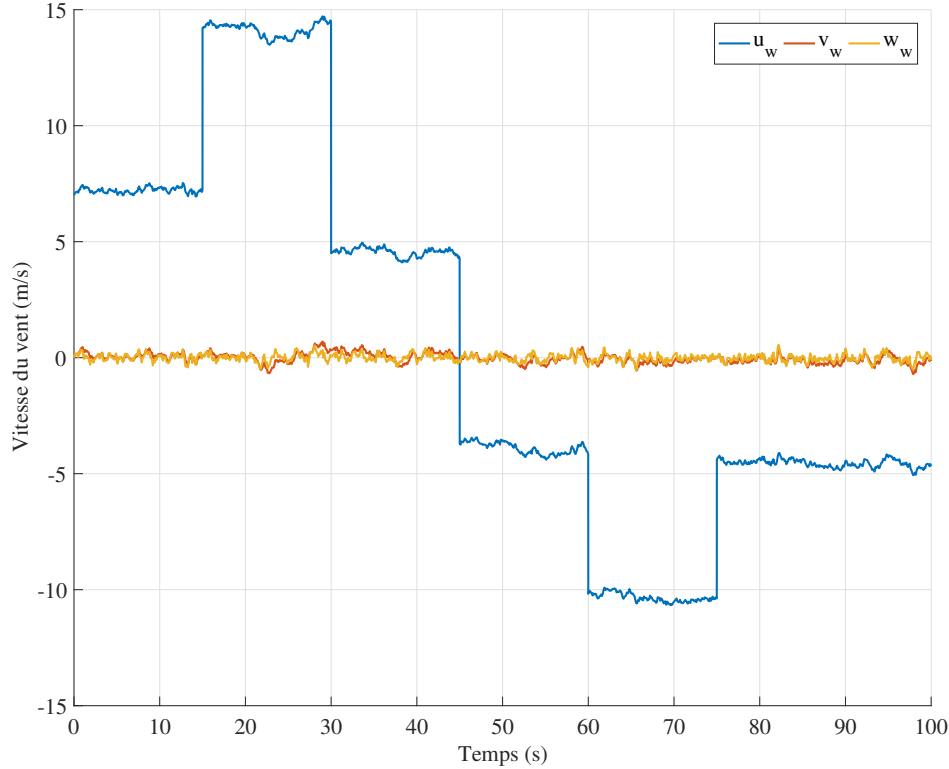


Figure 5.4 Entrée de vent

Les réponses temporelles et spatiales du quadricoptère pour le premier scénario sont donnés aux figures 5.5 et 5.6. La figure 5.5 montre la réponse en position du quadricoptère (selon les axes  $\mathbf{x}_i$ ,  $\mathbf{y}_i$  et  $\mathbf{z}_i$ ) sur une période de 100 secondes pour le contrôleur avec séquençement des gains (gs) et le contrôleur nominal (nom). La figure 5.6 montre ces mêmes résultats d'un point de vue spatial en montrant, d'une part, la position dans le plan horizontal et, d'autre part, la position en trois dimensions. On remarque que les performances en maintien de position et orientation (voir Fig. 5.7c) dans le plan horizontal sont améliorées avec le séquençement des gains (l'erreur maximale sur la position est plus petite et le temps de réponse est plus rapide) alors que c'est l'inverse pour la position verticale. Le séquençement ayant été fait pour un équilibre dans le plan horizontal, cela pourrait expliquer ces piètres performances dans le plan vertical. Il serait peut-être possible d'améliorer les performances en considérant

également la vitesse verticale comme variable de séquencement.

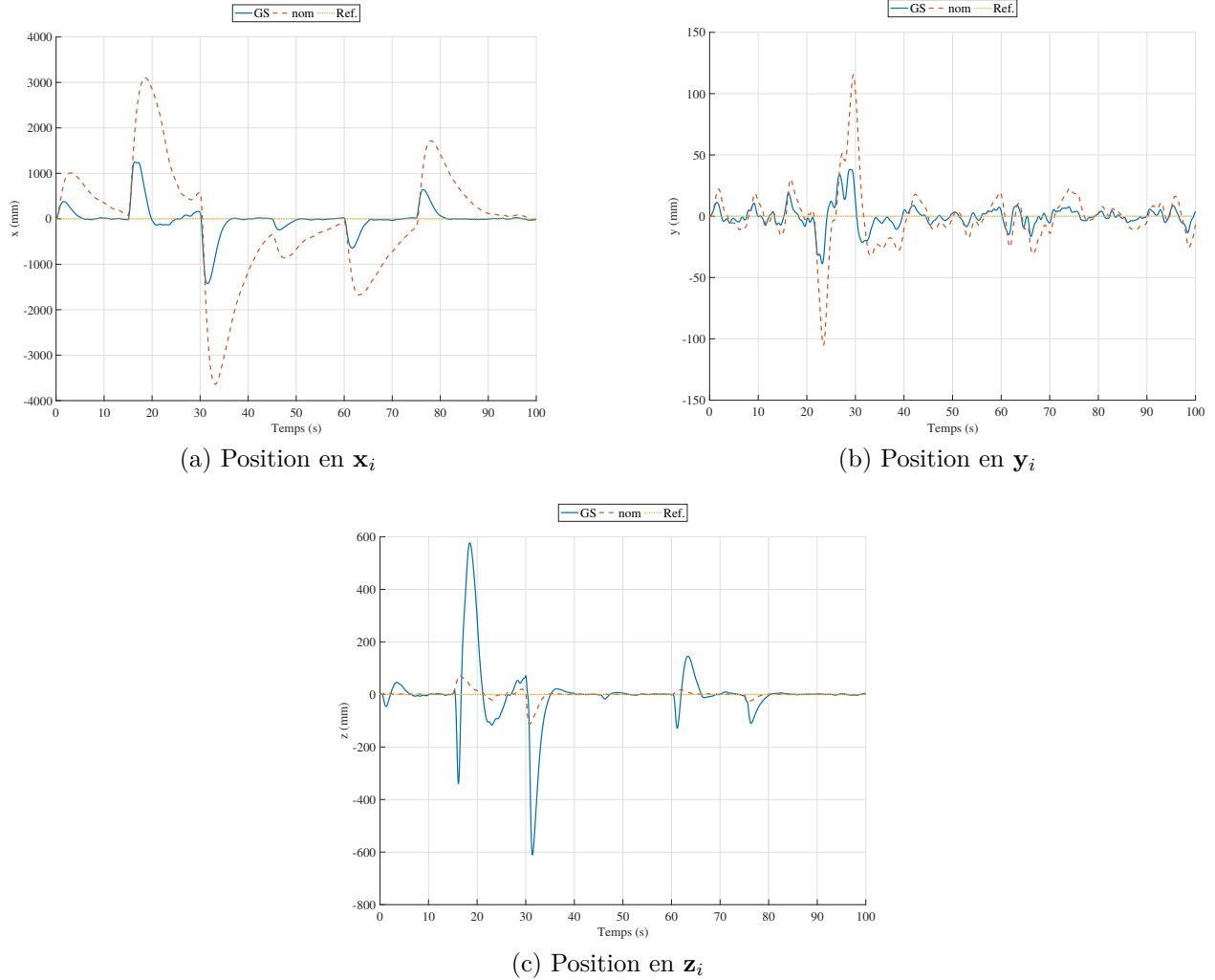


Figure 5.5 Position du quadricoptère pour un vol stationnaire lorsque soumis à différentes rafales

La figure 5.7 montre la réponse temporelle de l'attitude du quadricoptère. On remarque que le drone est surtout affecté en tangage en raison de l'axe selon lequel est orienté le vent, soit parallèle à  $x_i$ . On remarque aussi sur cette figure que pour un vent d'environ 15 m/s, le quadricoptère est incliné d'environ  $40^\circ$  ce qui s'approche de la limite à laquelle il peut maintenir son altitude ( $\sigma_{\max} = \cos^{-1}(\frac{m g_0}{F_{t,\max}}) = 39.2^\circ$ ). De plus, on voit que les dépassements pour le contrôleur séquencé sont plus grands que pour le contrôleur nominal ce qui pourrait résulter en des instabilités lors d'une éventuelle intégration au système réel.

La figure 5.8 montre l'évolution de la commande envoyée aux moteurs pour les deux contrôleurs. Un peu comme pour l'angle en tangage, la commande pour le contrôleur séquencé

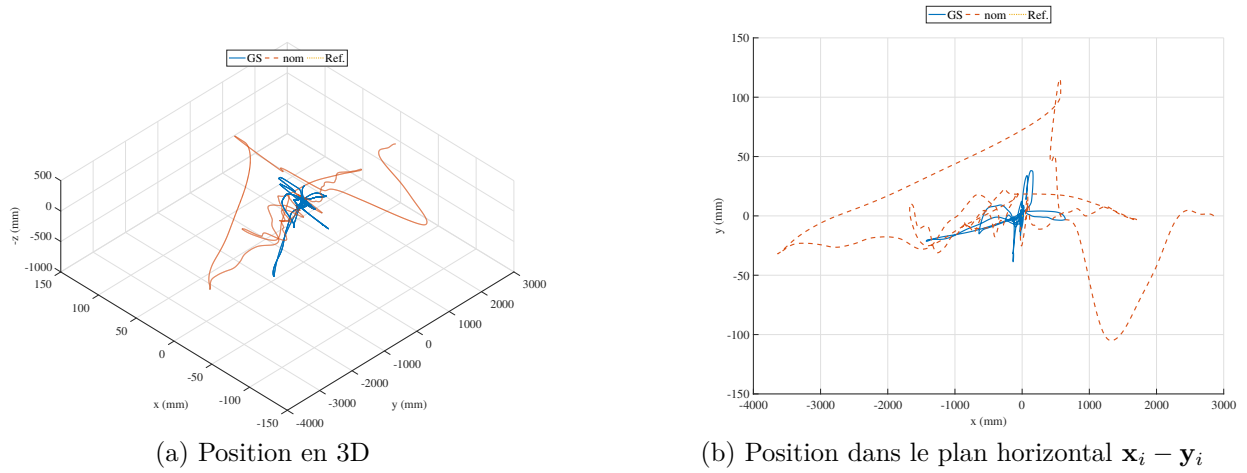


Figure 5.6 Position du quadricoptère en 2D et 3D pour un vol stationnaire lorsque soumis à différentes rafales

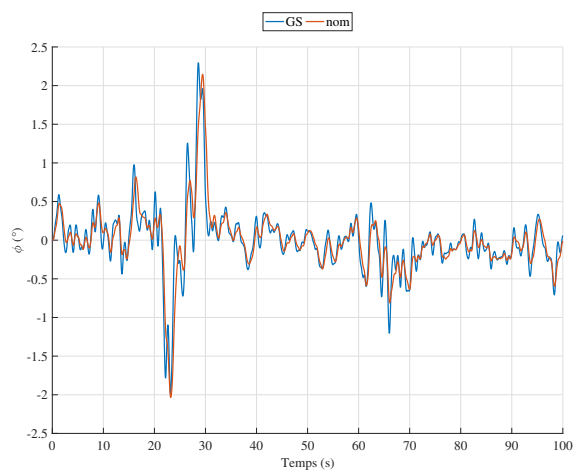
présente de plus grands dépassements ; un compromis est à faire pour un temps de réponse plus rapide.

### 5.2.7 Scénario de vol en suivi de trajectoire

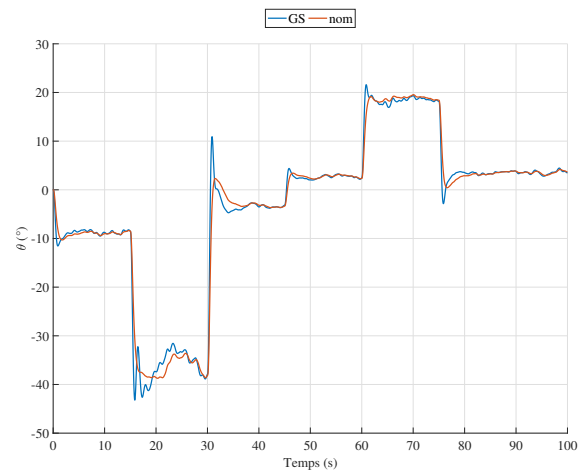
On simule dans cette section la réponse du quadricoptère lorsqu'on lui commande de suivre une trajectoire en forme de  $\infty$  d'amplitude de  $2 \times 1\text{ m}$  avec une période de 20 secondes. On montre donc à la figure 5.9 la position dans le plan horizontal et la position en trois dimensions. On voit que la loi de commande séquencée est meilleure, ce qui est consistant avec les résultats précédents voulant que la position du drone avec le contrôleur séquencé soit moins affectée qu'avec le contrôleur nominal.

### 5.2.8 Analyse de l'amélioration de la loi de commande avec le séquencement des gains

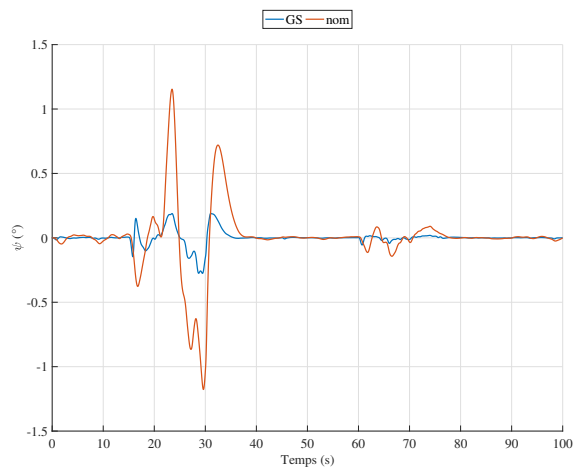
Bien qu'on observe une dégradation des performance en ce qui a trait au maintien de position selon l'axe vertical, on constate une nette amélioration de la réponse dans le plan horizontal, un temps de réponse plus rapide et une plus faible erreur. Ce sont pourtant les mêmes contraintes qui ont été imposées au système pour chacune des deux synthèses. Les performances se voient par contre dégradées pour la loi de commande nominale puisque la dynamique non linéaire du système tend à s'éloigner de la dynamique linéarisée utilisée lors de la synthèse dès que le drone est trop incliné.



(a) Attitude en roulis



(b) Attitude en tangage



(c) Attitude en lacet

Figure 5.7 Attitude du quadricoptère pour un vol stationnaire lorsque soumis à différentes rafales



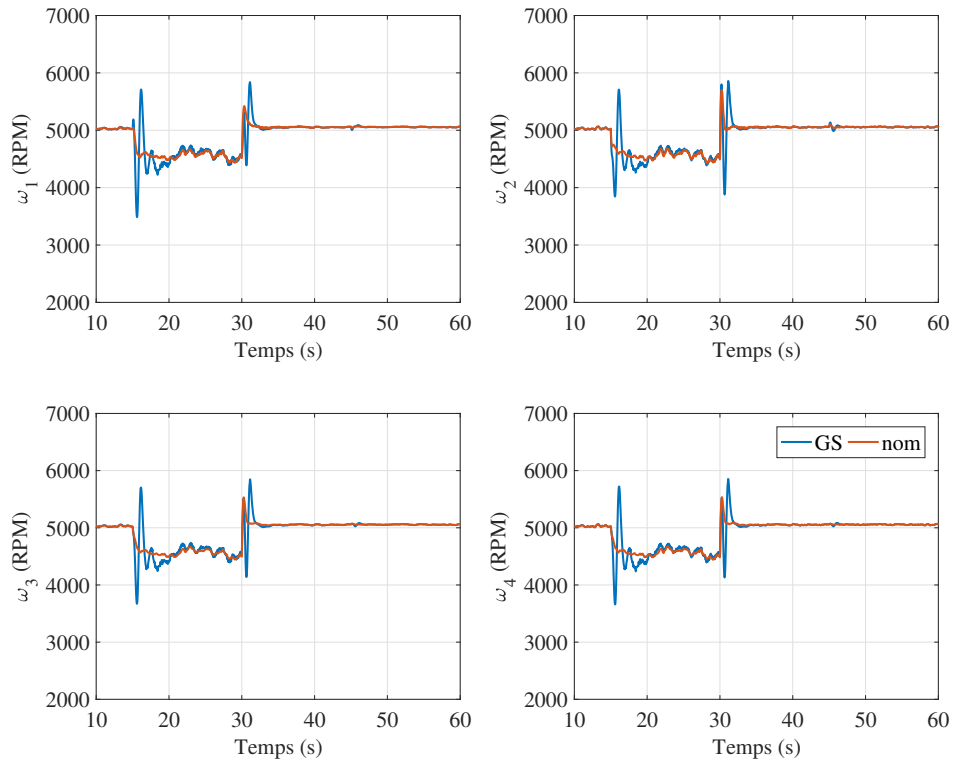


Figure 5.8 Vitesse de rotation  $\omega_i$  des moteurs pour un vol stationnaire lorsque soumis à différentes rafales de vent

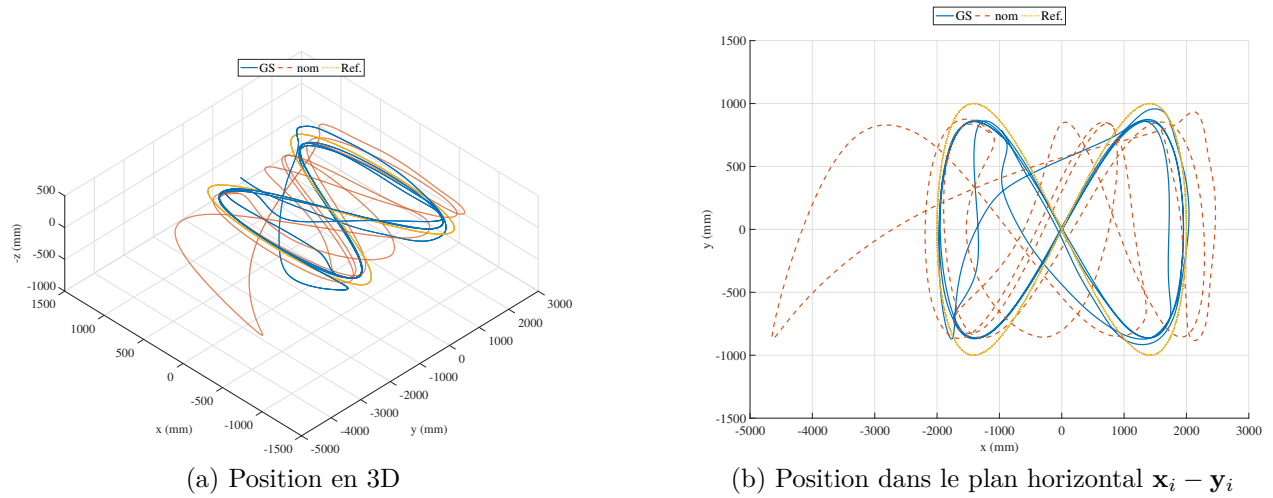


Figure 5.9 Position du quadricoptère en 2D et 3D pour un suivi de trajectoire circulaire lorsque soumis à différentes rafales de vent

## CHAPITRE 6 CONCLUSION

On conclut ici en rappelant brièvement ce qui a été présenté dans ce mémoire, on en présente les limitations et on termine en abordant les possibilités d'améliorations de la solution proposée et les domaines d'application.

### 6.1 Synthèse des travaux

L'objectif principal de ce travail consistait en la synthèse d'une loi de commande permettant d'améliorer la robustesse d'un quadricoptère face au vent et ses performances en milieux venteux. Pour y arriver, on a d'abord développé le modèle dynamique du quadricoptère. À partir des équations dynamiques de Newton, on a caractérisé son mouvement. Afin de pouvoir appliquer les techniques de synthèse linéaires au cas du quadricoptère, on a linéarisé les équations non linéaires et ainsi obtenu une expression du modèle d'état en fonction des valeurs d'équilibre d'un quadricoptère en vol de croisière.

En appliquant au modèle linéaire pour un vol stationnaire deux techniques de synthèse d'un contrôleur, soit la technique de synthèse classique LQR et la technique de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée, on a conclut que la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée était plus adaptée à la problématique ici étudiée. En effet, celle-ci permet de traiter la problématique de stabilité et de robustesse aux perturbations lors de la synthèse et offre plus de flexibilité au niveau de l'architecture de la loi de commande.

On a finalement modifié l'architecture de la loi de commande en utilisant des matrices de gains séquencés en fonction de l'attitude du quadricoptère. On a ainsi réussi à étendre les performances de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée sur une plus grande portion de l'enveloppe de vol que ce que le permettait la synthèse nominale. À cet effet, on a dû considérer les termes de couplage cachés dans le modèle linéarisé utilisé pour la synthèse. Ceux-ci issus d'une linéarisation adéquate de la loi de commande doivent être considérés, car ils changent les propriétés dynamiques d'un modèle à son point d'équilibre.

### 6.2 Limitations de la solution proposée

La solution proposée est directement dépendante de la modélisation du système. On peut par contre se rendre compte que pour la majorité des quadricoptères sur le marché, les paramètres dynamiques comme les inerties, les paramètre des moteurs ou les coefficients aérodynamiques, ne sont pas connus. La loi de commande synthétisée pour un modèle théorique voit alors ses

performances se dégrader lorsqu'implanté sur le système réel.

### 6.3 Améliorations futures

Pour la suite, il serait intéressant d'adapter la loi de commande pour commander le quadricoptère en suivi de trajectoire. Bien que le sujet ait été vaguement abordé dans ce mémoire lors du suivi d'une trajectoire circulaire, la problématique n'a pas été attaquée rigoureusement et il y aurait une possibilité d'amélioration des performances d'un quadricoptère se déplaçant à haute vitesse et devant exécuter des manœuvres agressives de façon à suivre un parcours imposé. On a aussi remarqué que la réponse verticale du quadricoptère se dégrade avec le séquençement des gains. Un nouveau séquençement des gains en fonction d'autres variables d'état comme la vitesse verticale serait envisageable pour améliorer les performances du contrôleur.

« Times and conditions change so rapidly that we must keep our aim constantly focused on the future. »

Walt Disney

## RÉFÉRENCES

*Flying Qualities of Piloted Aircraft.* Department of Defense Handbook. MIL-HDBK-1797. Washington, DC : U.S. Department of Defense, 1997.

E. Altug, J. P. Ostrowski, et R. Mahony, “Control of a quadrotor helicopter using visual feedback”, dans *Robotics and Automation, 2002. Proceedings. ICRA '02. IEEE International Conference on*, vol. 1. IEEE, 2002, pp. 72–77.

J. D. Anderson, *Fundamentals of Aerodynamics*, 5e éd., 2010, ch. 1, pp. 71–78.

P. Apkarian et D. Noll, “Nonsmooth h-infinity synthesis”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, no. 1, pp. 71 – 86, 2006.

——, “Nonsmooth optimization for multiband frequency domain control design”, *Automatica*, vol. 43, no. 4, pp. 724 – 31, 2007.

P. Apkarian, P. Gahinet, et C. Buhr, “Multi-model, multi-objective tuning of fixed-structure controllers”, Piscataway, NJ, USA, 2014, pp. 856 – 61.

P. Apkarian, M. N. Dao, et D. Noll, “Parametric robust structured control design”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 60, no. 7, pp. 1857 – 69, 2015.

AscTec, “Asctec pelican : Product overview”, Avril 2017, internet. En ligne : <http://wiki.asctec.de/display/AR/AscTec+Pelican>

J. R. Azinheira et A. Moutinho, “Hover control of an uav with backstepping design including input saturations”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 16, no. 3, pp. 517 – 526, 2008, backstepping;Hover control;. En ligne : <http://dx.doi.org/10.1109/TCST.2007.908209>

W. Bolton, *Mechatronics : Electronic Control Systems in Mechanical and Electrical Engineering*, série Pearson Education. Pearson/Prentice Hall, 2003.

S. Bouabdallah et R. Y. Siegwart, “Full control of a quadrotor”, dans *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2007 : IROS 2007 ; Oct. 29, 2007-Nov. 2, 2007, San Diego, CA.* Ieee, 2007, pp. 153–158.

S. Bouabdallah, A. Noth, et R. Siegwart, “Pid vs lq control techniques applied to an indoor micro quadrotor”, dans *Proc. of The IEEE International Conference on Intelligent Robots*

*and Systems (IROS)*. IEEE, 2004, pp. 2451–2456.

J. B. Brandt, R. W. Deters, G. K. Ananda, et M. S. Selig. (2005) Uiuc propeller data site. En ligne : [https://www.apcprop.com/v/PERFILES\\_WEB/listDatafiles.asp](https://www.apcprop.com/v/PERFILES_WEB/listDatafiles.asp)

J. B. Brandt et M. S. Selig, “Propeller performance data at low reynolds numbers”, dans *49th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition*, 2011, p. 1255.

N. Bruinsma et M. Steinbuch, “A fast algorithm to compute the h-norm of a transfer function matrix”, *Systems & Control Letters*, vol. 14, no. 4, pp. 287 – 93, 1990.

W. C. Davidon, “Variable metric method for minimization”, *SIAM Journal on Optimization*, vol. 1, no. 1, pp. 1–17, 1991.

D. L. de Athayde Guimarães, “Asctec pelican cad model”, Déc. 2014. En ligne : <http://wiki.asctec.de/display/AR/CAD+Models>

R. W. Deters, G. K. Ananda Krishnan, et M. S. Selig, “Reynolds number effects on the performance of small-scale propellers”, dans *32nd AIAA applied aerodynamics conference*, 2014, p. 2151.

J. Doyle, “Analysis of feedback systems with structured uncertainties”, dans *IEE Proceedings D-Control Theory and Applications*, vol. 129, no. 6. IET, 1982, pp. 242–250.

V. Dubanchet, D. Saussié, D. Alazard, C. Bérard, et C. L. Peuvédic, “Modeling and control of a space robot for active debris removal”, *CEAS Space Journal*, vol. 7, no. 2, pp. 203–218, Jun 2015. DOI : 10.1007/s12567-015-0082-4. En ligne : <https://doi.org/10.1007/s12567-015-0082-4>

P. Gahinet et P. Apkarian, “Structured H-infinity synthesis in MATLAB”, *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 44, no. 1, pp. 1435–1440, 2011.

H. Glauert, “Airplane propellers”, dans *Aerodynamic theory*. Springer, 1935, pp. 169–360.

D. T. Greenwood, *Advanced dynamics*. Cambridge University Press, 2006.

S. F. Hoerner et H. V. Borst, “Fluid-dynamic lift, practical information on aerodynamic and hydrodynamic lift”, BORST (HENRY V) AND ASSOCIATES WAYNE PA, Rapp. tech., 1975.

I. Kaminer, A. M. Pascoal, P. P. Khargonekar, et E. E. Coleman, “A velocity algorithm for the implementation of gain-scheduled controllers”, 1995.

W. Khan et M. Nahon, “Toward an accurate physics-based uav thruster model”, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 18, no. 4, pp. 1269–1279, Août 2013. DOI : 10.1109/TMECH.2013.2264105

—, “A propeller model for general forward flight conditions”, *International Journal of Intelligent Unmanned Systems*, vol. 3, no. 2/3, pp. 72–92, 2015. DOI : 10.1108/IJIUS-06-2015-0007. En ligne : <http://dx.doi.org/10.1108/IJIUS-06-2015-0007>

A. L’Afflitto, R. B. Anderson, et K. Mohammadi, “An introduction to nonlinear robust control for unmanned quadrotor aircraft : How to design control algorithms for quadrotors using sliding mode control and adaptive control techniques [focus on education]”, *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 38, no. 3, pp. 102–121, June 2018. DOI : 10.1109/MCS.2018.2810559

D. Lawrence et W. Rugh, “Gain scheduling dynamic linear controllers for a nonlinear plant”, *Automatica*, vol. 31, no. 3, pp. 381 – 90, 1995.

D. A. Lawrence, “Analysis and design of gain scheduled sampled-data control systems”, *Automatica*, vol. 37, no. 7, pp. 1041–1048, 2001.

D. A. Lawrence et W. J. Rugh, “On a stability theorem for nonlinear systems with slowly varying inputs”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, no. 7, pp. 860–864, 1990.

D. Lee, H. J. Kim, et S. Sastry, “Feedback linearization vs. adaptive sliding mode control for a quadrotor helicopter”, *International Journal of control, Automation and systems*, vol. 7, no. 3, pp. 419–428, 2009.

T. Lee, M. Leok, et N. H. McClamroch, “Geometric tracking control of a quadrotor uav on  $se(3)$ ”, dans *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, Dec 2010, pp. 5420–5425. DOI : 10.1109/CDC.2010.5717652

G. Leishman, *Principles of Helicopter Aerodynamics with CD Extra*, série Cambridge aerospace series. Cambridge University Press, 2006.

D. J. Leith et W. Leithead, “Survey of gain-scheduling analysis and design”, *International Journal of Control*, vol. 73, no. 11, pp. 1001 – 1025, 2000.

H. Lhachemi, D. Saussie, et G. Zhu, “A robust and self-scheduled longitudinal flight control system : A multi-model and structured happroach”, National Harbor, MD, United states, 2014, pp. AIRBUS ; BOEING ; DUNMORE ; Lockheed Martin –.

——, “Hidden coupling terms inclusion in gain-scheduling control design : Extension of an eigenstructure assignment-based technique”, *IFAC-PapersOnLine*, vol. 49, no. 17, pp. 403 – 408, 2016.

——, “Gain-scheduling control design in the presence of hidden coupling terms via eigenstructure assignment : Application to a pitch-axis missile autopilot”, vol. 2016-July, Boston, MA, United states, 2016, pp. 4041 – 4046.

——, “Explicit hidden coupling terms handling in gain-scheduling control design via eigenstructure assignment”, *Control Engineering Practice*, vol. 58, pp. 1 – 11, 2017. En ligne : <http://dx.doi.org/10.1016/j.conengprac.2016.09.005>

C. Lindenburg, “Stall coefficients”, dans *NREL Rept. ECN-RX-01-004, IEA Symposium*, 2000.

G. P. Liu et R. Patton, *Eigenstructure assignment for control system design*. John Wiley Sons, 1998.

C. Massé, O. Gougeon, D. Nguyen, et D. Saussié, “Modeling and control of a quadcopter flying in a wind field : A comparison between lqr and structured h-inf control techniques”, dans *2018 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, June 2018, pp. 1408–1417. DOI : 10.1109/ICUAS.2018.8453402

B. W. McCormick, *Aerodynamics, aeronautics, and flight mechanics*. Wiley New York, 1995, vol. 2.

J. L. Meriam et L. G. Kraige, *Engineering mechanics : dynamics*. John Wiley & Sons, 2012, vol. 2.

D. Moerder et A. Calise, “Convergence of a numerical algorithm for calculating optimal output feedback gains”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 30, no. 9, pp. 900–903, 1985.

A. Mokhtari et A. Benallegue, “Dynamic feedback controller of euler angles and wind parameters estimation for a quadrotor unmanned aerial vehicle”, dans *Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA '04. 2004 IEEE International Conference on*, vol. 3. IEEE, 2004, pp. 2359–2366.

J. A. Nelder et R. Mead, “A simplex method for function minimization”, *The computer journal*, vol. 7, no. 4, pp. 308–313, 1965.

D.-T. Nguyen, D. Saussié, et L. Saydy, “Robust self-scheduled fault-tolerant control of a quadrotor UAV”, dans *20th World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC)*, 2017, Conference Proceedings. DOI : 10.1016/j.ifacol.2017.08.1141

R. A. Nichols, R. T. Reichert, et W. J. Rugh, “Gain scheduling for h-infinity controllers : A flight control example”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 1, no. 2, pp. 69 – 78, 1993.

G. V. Raffo, M. G. Ortega, et F. R. Rubio, “An integral predictive/nonlinear h infinity control structure for a quadrotor helicopter”, *Automatica*, vol. 46, no. 1, pp. 29 – 39, 2010. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2009.10.018>. En ligne : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109809004798>

W. J. Rugh et J. S. Shamma, “Research on gain scheduling”, *Automatica*, vol. 36, no. 10, pp. 1401–1425, 2000.

J. S. Shamma et M. Athans, “Guaranteed properties of gain scheduled control for linear parameter-varying plants”, *Automatica*, vol. 27, no. 3, pp. 559–564, 1991.

—, “Gain scheduling : Potential hazards and possible remedies”, *IEEE Control Systems*, vol. 12, no. 3, pp. 101–107, 1992.

D. J. Stilwell et W. J. Rugh, “Stability preserving interpolation methods for the synthesis of gain scheduled controllers”, *Automatica*, vol. 36, no. 5, pp. 665–671, 2000.

A. Tayebi et S. McGilvray, “Attitude stabilization of a four-rotor aerial robot”, vol. 2, Nassau, Bahamas, 2004, pp. 1216 – 1221, aerial robots ;Angular velocity ;Attitude stabilization ;Gyroscopic torques ;.

N. K. Tran, E. Bulka, et M. Nahon, “Quadrotor control in a wind field”, dans *2015 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, Juin 2015, pp. 320–328. DOI : 10.1109/ICUAS.2015.7152306

N. K. Tran, “Modeling and control of a quadrotor in a wind field”, Mémoire de maîtrise, Department of Mechanical Engineering, McGill University, Montreal, Quebec, Canada, Déc. 2015.



S. Waslander et C. Wang, “Wind disturbance estimation and rejection for quadrotor position control”, dans *AIAA Infotech at Aerospace Conference and AIAA Unmanned Unlimited Conference*, 2009, p. 1983.

W. Yang, G. Herrmann, M. Lowenberg, et X. Chen, “Dynamic gain scheduled control in a multi-variable control framework”, dans *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, Dec 2010, pp. 7081–7086. DOI : 10.1109/CDC.2010.5717054

W. Yang, N. Hammoudi, G. Herrmann, M. Lowenberg, et X. Chen, “Dynamic gain-scheduled control and extended linearisation : extensions, explicit formulae and stability”, *International Journal of Control*, vol. 88, no. 1, pp. 163–179, 2015.

G. Zames, “Feedback and optimal sensitivity : Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses”, *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 26, no. 2, pp. 301–320, 1981.

## ANNEXE A    MATRICES DE GAINS MULTI-MODÈLES AVEC SÉQUENCEMENT

Dans cette annexe sont présentées les matrices de gains issues de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée pour la loi de commande nominale et la loi de commande avec séquençement effectuée au chapitre 5.

Les gains pour la loi de commande nominale sont :

$$\mathbf{K}_{i,c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5.79 & 0 \\ 0 & -16.1 & 0 & 0 \\ 4.39 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50.2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{p,c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 26.2 & 0 \\ 0 & -44.1 & 0 & 0 \\ 21.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 62.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{d_1,c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -89.1 & -25.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40.0 & 7.03 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{d_2,c} = \begin{bmatrix} 46.8 & 9.03 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 62.3 & 451 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 42.5 & 229 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 149 & 78.5 \end{bmatrix}$$

Les gains pour la loi de commande avec séquencement sont :

$$\mathbf{K}_{i,c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 212 & 0 & 0 & 117 & -3.09 & 0 & 131 & 0 & -4.52 & 0 \\ 0 & -106 & 0 & 0 & 0 & 8.15 & -69.5 & 0 & 0 & -3.71 & 0 & 139 \\ 59.1 & 0 & 0 & 0 & -6.73 & 0 & 0 & -78.6 & -4.32 & 0 & -75.5 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 235 & 90.5 & 0 & 0 & -0.80 & 0 & 93.8 & 0 & -0.89 \\ & 0 & -10.3 & -52.8 & 0 & 6.69 & 0 & -101 & 0 & & & \\ \dots & 0 & 2.12 & 6.60 & 0 & 0 & 10.9 & 0 & 8.19 & & & \\ & -3.52 & 0 & 0 & -8.25 & -5.81 & 0 & 0.21 & 0 & & & \\ & 0.52 & 0 & 0 & -1.06 & 0 & -4.81 & 0 & -46.8 & & & \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{p,c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 16.0 & 0 & 0 & -61.3 & -0.72 & 0 & 28.1 & 0 & 4.63 & 0 \\ 0 & -34.8 & 0 & 0 & 0 & 1.21 & -42.4 & 0 & 0 & 0.52 & 0 & 34.6 \\ 42.0 & 0 & 0 & 0 & 2.24 & 0 & 0 & -35.2 & 5.38 & 0 & -47.7 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 56.5 & -1.32 & 0 & 0 & 4.78 & 0 & 44.1 & 0 & 1.63 \\ & 0 & -6.17 & 17.8 & 0 & -3.71 & 0 & -37.9 & 0 & & & \\ \dots & 0 & -26.9 & -6.06 & 0 & 0 & 3.96 & 0 & -5.27 & & & \\ & 8.07 & 0 & 0 & 3.36 & 6.52 & 0 & 0.16 & 0 & & & \\ & 1.67 & 0 & 0 & -45.0 & 0 & 0.96 & 0 & 58.3 & & & \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{d_1,c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 250 & 193 & 0 & 0 & 0 & 0 & -43.0 & 209 \\ -159 & -168 & 0 & 0 & 7.32 & 12.6 & 0 & 0 & 0.39 & -5.09 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 123 & 92.4 & 0 & 0 & -1.11 & -10.8 & 0 & 0 & 0.96 & -5.70 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 43.2 & 141 & 157 & 146 & 0 & 0 \\ & -26.1 & -14.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12.3 & 7.61 & & & \\ \dots & 20.2 & 11.2 & 0 & 0 & 30.4 & 21.0 & 0 & 0 & & & \\ & 0 & 0 & -11.9 & -3.43 & 0 & 0 & 12.5 & -9.88 & & & \\ & 0 & 0 & -1.54 & 5.74 & -0.99 & -3.23 & 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{d_2,c} = \begin{bmatrix} 225 & 338 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 73.8 & 402 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 72.8 & 405 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 338 & 363 & \\ & -3.64 & -10.4 & 13.6 & 334 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 34.1 & -101 & 2.69 & -20.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & -5.41 & 4.78 & 124 & 236 \dots \\ & 0 & 0 & 0 & 10.6 & -284 & 11.1 & -5.26 & 0 \\ & -1.65 & -7.59 & 0 & 0 & 26.8 & 208 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & -1.01 & 19.6 & 0 & 0 & -33.0 & -143 \\ & -29.7 & -127 & 0 & 0 & 0.58 & 12.1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 3.30 & 79.4 & 0 & 0 & 1.12 & 0.55 \\ & -26.4 & 19.8 & 21.9 & -38.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & -1.00 & 12.7 & 1.75 & -42.9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 14.2 & -6.63 & 2.32 & -17.0 \dots \\ & 0 & 0 & 0 & -16.0 & -26.2 & 13.3 & -52.8 & 0 \\ & 10.7 & 20.5 & 0 & 0 & -20.9 & 21.6 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & -19.4 & -48.2 & 0 & 0 & 4.12 & 12.4 \\ & 4.32 & -1.61 & 0 & 0 & -63.3 & -16.6 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & -8.90 & 27.8 & 0 & 0 & 21.7 & -21.4 \end{bmatrix}$$